

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ

ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ

Катедра за теоријску електротехнику

Ненад Н. Цветковић

**ПРОРАЧУН ВОДОВА
ПОЛИГОНАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА**

-магистарска теза-

НИШ, 2001.

ПРЕДГОВОР

У раду који је пред вама, описана је анализа водова полигоналног попречног пресека применом метода конформних пресликавања, Ламеовог метода (метода функције облика) и метода еквивалентне електроде (МЕЕ). Идеја за овај рад потекла је од ментора проф. др Драгутина М. Величковића, редовног професора и шефа Катедре за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу. Својим саветима и сугестијама кандидату, како за време последипломских студија тако и током израде магистарске тезе, професор Величковић значајно је допринео квалитету овог рада на чему му се кандидат најтоплије захваљује.

Рад се поред уводног дела (који представља прво поглавље), закључка и литературе, састоји од још три поглавља, при чему је свако од њих посвећено једном од три претходно поменута метода.

У уводном делу дат је преглед и краћи прикази метода везаних за предмет истраживања овог рада, са којима се кандидат током истраживања срео.

У другом поглављу наведене су опште карактеристике примене конформних пресликавања у електростатици. Сходно проблему којим се рад бави, детаљније су описана поједина конформна пресликавања из групе Шварц-Кристофелових трансформација, као и неки од проблема који се помоћу њих решавају.

Метод функције облика и начин његове примене чине садржај трећег поглавља. Описан је и један нов приближан нумерички поступак намењен решавању електростатичких проблема заснован на идеји да се еквипотенцијалне површине директно апроксимирају помоћу на одговарајући начин изабраних функција, које испуњавају Ламеов услов. Поменути поступак примењен је на водове квадратног попречног пресека проводника.

Најобимније четврто поглавље, посвећено је решавању водова полигоналног попречног пресека проводника применом метода еквивалентне електроде. МЕЕ је примењен на прорачун вишежичних водова правоугаоног попречног пресека проводника изнад проводне равни, као и оклопљених и прорезаних водова правоугаоног попречног пресека проводника. Овако добијени резултати упоређени су са решењима добијеним помоћу других метода, укључујући и примену конформних пресликавања и Ламеов метод.

Рад се састоји од 110 слика, 155 формула и 11 таблица, нумерисаних за свако поглавље посебно. Да би праћење излагања било једноставније, на крају сваког поглавља хронолошки је наведена литература коришћена при његовој изради. Комплетан хронолошки списак коришћене литературе налази се на крају рада.

Формуле су нумерисане и навођене у малим, а референце у средњим (угластим) заградама. У случајевима када је указивано на различите делове исте референце, ознаци референце додавана су мала слова абецеде. За означавање скаларних величина коришћена су коса (*italic*), мала и велика слова латинице, као и исправна грчка слова, док су векторске величине означаване масним и искошеним (***bold-italic***) карактерима. Као индекси су коришћени нумерички симболи и искошени и нормални карактери.

Сви неопходни прорачуни урађени су помоћу програма написаних у FORTRAN-у. При томе су кандидату били доступни потпрограми DSIMQ за решавање система линеарних једначина и SGAUS за нумеричку интеграцију. Битно је истаћи да је овај потоњи развијен на Катедри за теоријску електротехнику Електронског факултета у Нишу. Коначна визуелна форма рада резултат је примене различитих верзија програма и програмских пакета Microsoft Word, CorelDRAW!, Mathematica и MicroCal Origin.

1. УВОД

Велики број дводимензионалних проблема поља могуће је решити применом конформних пресликавања, при чему се долази до тачног решења у затвореном облику. Примена конформних пресликавања која припадају групи Шварц-Кристофелових трансформација [1.1, 1.2], своди решавање проблема у којима се јављају полигонални попречни пресеци на анализу система једноставнијих геометрија. У [1.6], помоћу појединих трансформација из ове групе пресликавања решен је, између осталих и један број проблема у којима се јављају проводници правоугаоног попречног пресека. Међутим, у општем случају примена поменутих трансформација захтева нумеричко решавање трансцедентних једначина, што је један од главних недостатака метода. Шварц-Кристофелове трансформације су веома чест предмет анализе, било као самосталан проблем [1.7], било у оквиру ширих истраживања [1.8]. За одређивање параметара Шварц-Кристофелове трансформације неопходних за решавање дводимензионалних проблема произвољних полигоналних геометрија развијени су и одговарајући програмски пакети [1.9].

Карактеристична импеданса коаксијалног вода правоугаоног попречног пресека проводника и кошуљице одређена је и помоћу ортонормалне блок анализе (orthonormal block-analysis) [1.3]. Суштина овог метода је да се решење за потенцијал претпоставља у облику сума Фуријеових редова и замењује у Лапласову једначину. Овако добијено решење за подужну капацитивност, односно карактеристичну импедансу такође садржи суме редова са неограниченим бројем чланова.

Један од метода за одређивање подужне капацитивности коаксијалног вода правоугаоног попречног пресека заснован је на идеји да се његова капацитивност одреди суперпозицијом капацитивности "равних делова" електроде (које је могуће једноставно одредити као капацитивности равног кондензатора) и капацитивности "L профила" у околини угла електроде која се одређује применом конформног пресликавања [1.4].

За поједине специјалне случајеве предложене су одговарајуће емпиријске формуле за одређивање подужне капацитивности. Тако је применом метода квадратне мреже (square net method) [1.5], развијена емпиријска формула за карактеристичну импедансу вадушног коаксијалног правоугаоног вода, када су кошуљица и проводник квадратног попречног пресека, а страница кошуљице најмање два пута дужа од странице проводника.

У овом раду, водови квадратног попречног пресека проводника анализирани су помоћу једног новог нумеричког метода у чијој је основи идеја да се екипотенцијалне површине (у овом случају површине електрода) апроксимирају помоћу на одговарајући начин одабраних функција које испуњавају Ламеов услов, односно услов примене Ламеовог метода [1.11] (Сам Ламеов метод је иначе базиран на резултатима који се односе на услове које треба да задовољи једначина екипотенцијалне површине [1.10]). Од значаја су при томе биле чињенице да се предложени метод може применити и на електроде које имају оштре ивице као и то да се решење за потенцијал добија у затвореном облику. Предложени метод не захтева било каква компликованија математичка израчунавања присутна код неких других метода (нумеричка интеграција и сл.), али је код његове примене неопходно решити систем нелинеарних једначина, што је проблем који је посебно изражен када се екипотенцијалне површине апроксимирају функцијама вишег реда. Након одређивања потенцијала, остале величине од интереса одређују се у оквиру стандардних процедура везаних за Ламеов метод.

Коначно, применом метода еквивалентне електроде (МЕЕ) [1.12], у овом раду су анализирани поједини водови правоугаоног попречног пресека проводника, укључујући оклопљене и прорезане водове, као и водове смештене изнад проводне

равни. Сам нумерички метод, развијен на Електронском факултету у Нишу, предложен је за приближан прорачун квазистационарних електромагнетних поља и других потенцијалних поља теоријске физике. Метод се може применити на решавање дводимензионих и тродимензионалних проблема. Суштина метода је у идеји да се електрода произвољног облика замени еквивалентним системом састављеним од коначног броја тзв. еквивалентних електрода (ЕЕ). При томе се облик и положај еквивалентних електрода бирају тако да у потпуности замене анализирани електродни систем. Математички апарат је једноставан и своди се на решавање система линеарних једначина. Примена МЕЕ не захтева нумеричку интеграцију нити решавање нелинеарних једначина било које врсте, што је његова предност у односу на претходно описани нумерички поступак заснован на примени Ламеовог метода, као и у односу на примену конформних пресликавања. Понекад је у случајевима вишеелектродних система или проблема у којима је посматрани електродни систем смештен у слојевитој средини погодна користити Грине функције за поједине електроде, односно слојевите средине, док се остале електроде електродног система замењују системом ЕЕ.

Литература

- [1.1] E. B. Christoffel: *Sui Problema delle Temperature Stazionarie e la Rappresentazione di una Data Superficie*, Ann. Mat. Pura Appl., 1, 1867, p.p. 95
- [1.2] H. A. Shwartz: *Über einige Abbildungsaufgaben*, J. reine Angew. Math., 70, 1869, p.p. 105
- [1.3] J. Skiles and T. J. Higgins: *Determination of the Characteristic Impedance of UHF Coaxial Rectangular Transmission Lines*, Proceedings National Electronics Conference, Chicago, USA, October 4-6, 1954, p.p. 97-108
- [1.4] T. S. Chen: *Determination of the Capacitance, Inductance, and Characteristic Impedance of Rectangular Lines*, IRE Transactions on Microwave Theory and Technology, MTT-8, 1960, p.p. 510-519
- [1.5] H. E. Green: *Characteristic Impedance of square coaxial line*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-11, 1963, p.p. 554-555
- [1.6] Risaburo Sato and Tetsuo Ikeda: *Line constants*, Microwave Filters and Circuits-Contributions from Japan, edited by Akio Matsumoto, Academic Press, New York and London, 1970, p.p. 123-156
- [1.7] Trefethen, Lloyd N.: *Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation*, SIAM J. Scientific & Statistical Computation, 1, 1980, p.p. 82-102
- [1.8] Surutka V. Jovan, Veličković M. Dragutin: *Some Improvements of the Charge Simulation Method for Computing Electrostatic Fields*, Bulletin LXXXIV de l' Academie Serbe des Sciences et des Arts, Class des Sciences techniques, No 15, 1981, p.p. 31-35
- [1.9] Trefethen, Lloyd N.: *Computer applications of the Schwarz-Christoffel transformation*, in E. B. Christoffel-the Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences, edited by P. L. Butzer & F. Feher, Birkhauser Verlag, Basel, 1981, p.p. 263-274
- [1.10] William R. Smythe: *Static and dynamic electricity*, Third edition, Revised printing, A Summa Book, Hemisphere publishing corporation, A member of the Taylor & Francis Group, New York-Washington-Philadelphia-London, 1989, p.p. 121-122
- [1.11] Драгутин М. Величковић, *Приближно нумеричко решавање електростатичких проблема помоћу Ламеовог метода*, XXXIX Конференција ЕТРАН, Златибор, 6-9. јун, 1995, Зборник радова, Свеска II, стр. 282-285
- [1.12] D. M. Veličković: *Equivalent Electrodes Method*, Scientific Review, Belgrade, 1996, p.p. 207-248

2. ПРИМЕНА КОНФОРМНИХ ПРЕСЛИКАВАЊА НА РЕШАВАЊЕ ЕЛЕКТРОСТАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА

2.1. О конформним пресликавањима

Примена конформних пресликавања је веома захвална метода за решавање дводимензионалних проблема поља, посебно онда када је неопходно решавати проблеме у којима су присутне сложене геометрије. Тако је на пример, применом овог метода могуће анализирати поље у ексцентричним кабловима кружног попречног пресека, водовима и таласоводима различитих попречних пресека, у околини усамљеног оптерећеног проводника полигоналног попречног пресека или у ваздушним процепима ротационих машина. Велики број поступака заснованих на примени конформних пресликавања доводи до једноставних аналитичких израза за вредност флуksа магнетног поља или за потенцијал електростатичког поља, при чему је без већих проблема могуће одредити расподелу интензитета електричног, односно магнетног поља. Понекад је у сложенијим случајевима неопходно примени две или више узастопних трансформација, да би се дошло до једноставније геометрије попречног пресека. Код примене конформних пресликавања неопходно је, у већини случајева сматрати граничне области између различитих средина еквипотенцијалним (бесконечно пропустљивим или бесконачно проводним) или претпоставити да се оне поклапају са линијама флуksа, док је понекад потребно комбиновати ове две претпоставке [2.4, 2.5, 2.6a]. Наведена чињеница представља главно ограничење за примену конформних пресликавања на решавање различитих проблема које се јављају у пракси.

У циљу илустрације начина примене конформних пресликавања и сходно проблему који представља предмет истраживања овог рада, у тексту који следи биће детаљније описане трансформације којима је могуће пресликати полигонални попречни пресек (његову унутрашњост или спољашњост) на унутрашњу или спољашњу област јединичног круга. Поменута пресликавања спадају у групу Шварц-Кристофелових трансформација, предложених у референцама [2.1] и [2.2] [2.6b].

2.2. Шварц-Кристофелова трансформација

Шварц-Кристофелова трансформација заснована је на идеји да се темена N -тоугаоне полигоналне линије смештене у z -равни ($z = x + jy$) (Сл. 2.1), пресликају у други координатни систем (t -раван) тако да дужи које представљају саставне де-

лове полигоналне линије, у \underline{t} -равни (Сл. 2.2) леже на истом правцу [2.5, 2.6с]. При томе се полази од следеће диференцијалне једначине:

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{t}} = C \prod_{n=1}^N (\underline{t} - a_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} \quad (2.1)$$

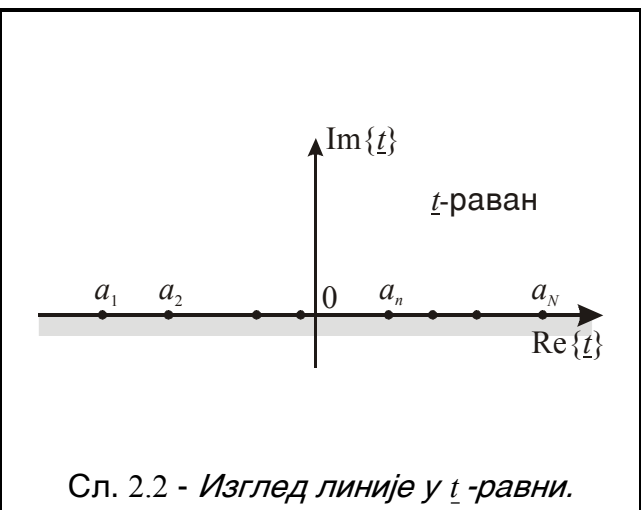
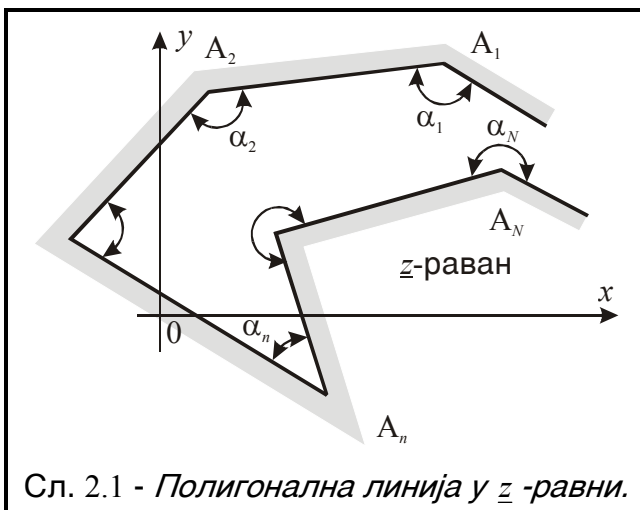
У изразу (2.1), познатом као Шварц-Кристофелова диференцијална једначина, C представља комплексну константу, са a_n , $n=1,2,\dots,N$, означене су тачке на реалној оси \underline{t} -равни које одговарају теменима полигоналне линије A_n , $n=1,2,\dots,N$ у \underline{z} -равни, док су са α_n , $n=1,2,\dots,N$ обележени одговарајући унутрашњи углови полигоналне линије. Коришћењем диференцијалне једначине (2.1), и конформног пресликавања задатог изразом

$$\underline{t} = j \frac{1-w}{1+w}, \quad (2.2)$$

којим се из \underline{t} -равни полураван $\text{Im}(\underline{t}) \geq 0$ пресликава на унутрашњу, а полураван $\text{Im}(\underline{t}) \leq 0$ на спољашњу област јединичног круга смештеног у \underline{w} -равни ($\underline{w} = u + jv$), добијају се следећи изрази, под заједничким називом познати као Шварц-Кристофелове трансформације [2.5, 2.7],

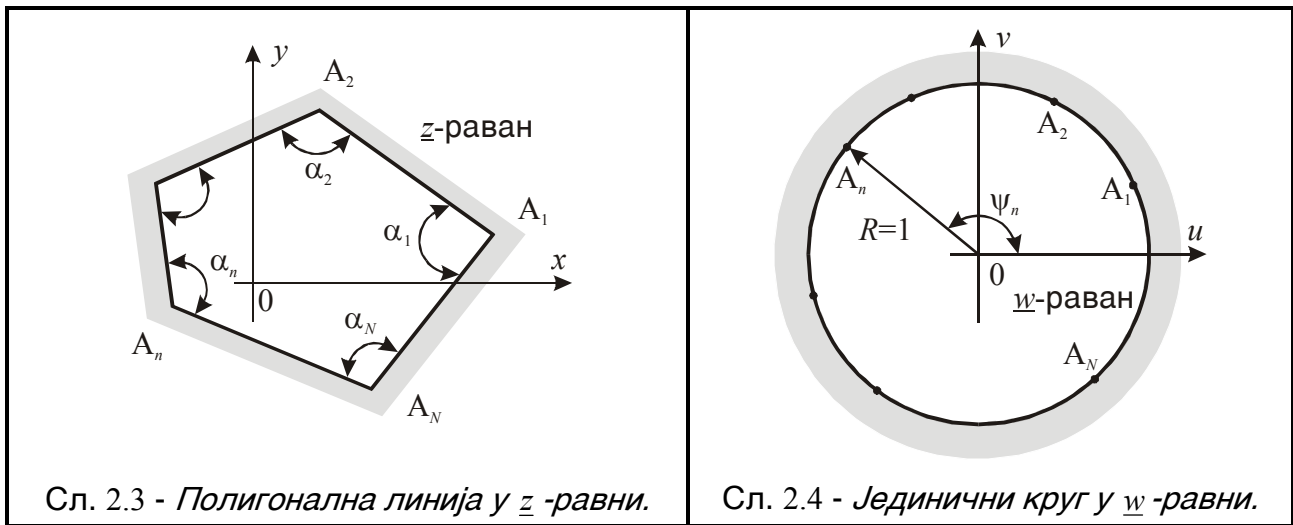
$$\underline{z} = C_1 \int_1^w \prod_{n=1}^N (\underline{w} - \underline{w}_n)^{(\alpha_n/\pi)-1} d\underline{w} + C_2 \quad \text{и} \quad (2.3)$$

$$\underline{z} = C_1 \int_1^w \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\underline{w}_n}{\underline{w}}\right)^{1-(\alpha_n/\pi)} d\underline{w} + C_2. \quad (2.4)$$



Трансформација (2.3) пресликава унутрашњост цилиндричне области полигоналног попречног пресека у \underline{z} -равни (Сл. 2.3) на унутрашњост цилиндричне области кружног попречног пресека јединичног полупречника у \underline{w} -равни (Сл. 2.4), док се применом трансформације (2.4) спољашњост цилиндричне области полигоналног попречног пресека из \underline{z} -равни пресликава у \underline{w} -раван, на спољашњост цилиндричне области чији се попречни пресек такође ослања на јединични круг. При томе се теме на полигона A_n , $n=1,2,\dots,N$ пресликавају у тачке на јединичном кругу за које је

$\underline{w} = \underline{w}_n = e^{j\psi_n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, док је $p_n = \alpha_n / \pi$, $n = 1, 2, \dots, N$. Са C_1 и C_2 означене су константе које се одређују за сваки пример пресликавања понаособ.



Сл. 2.3 - Полигонална линија у \underline{z} -равни.

Сл. 2.4 - Јединични круг у \underline{w} -равни.

Поред трансформација (2.3) и (2.4) које се веома често користе у пракси, у групу Шварц-Кристофелових трансформација, поред осталих спадају и трансформације помоћу којих је могуће прсликати унутрашњост полигона на спољашњост јединичног круга, односно спољашњост полигона на унутрашњост јединичног круга. Ове трансформације могу се генерисати на сличан начин као трансформације (2.3) и (2.4), али се у пракси ретко користе.

2.2.1. Шварц-Кристофелова трансформација за квадрат

Шварц-Кристофелова трансформација најчешћу примену налази код проблема у којима фигуришу проводници правоугаоног, односно квадратног попречног пресека. Из тог разлога, у тексту који следи биће детаљније објашњена примена ове трансформације на квадратни попречни пресек.

2.2.1.1 Подужно наелектрисање у проводној цилиндричној шупљини квадратног попречног пресека

Посматра се подужно наелектрисање у цилиндричној шупљини проводних зидова и квадратног попречног пресека, као на Сл. 2.5 [2.7].

Помоћу пресликавања задатог изразом (2.3), унутрашњост квадратне шупљине из \underline{z} -равни ($\underline{z} = x + jy$) прсликава се на унутрашњост јединичног круга у \underline{w} -равни ($\underline{w} = u + jv = Re^{j\psi}$) (Сл. 2.6), при чему је вредност параметара у изразу (2.3) $N = 4$ и $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/2$. Пресликавање (2.3) тада има облик,

$$\underline{z} = C_1 \int_1^{\underline{w}} \frac{1}{\sqrt{1 + \underline{w}^4}} d\underline{w} + C_2. \quad (2.5)$$

Применом развоја

$$(1 + \underline{w}^4)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \underline{w}^{4n}, |\underline{w}| \leq 1, \quad (2.6)$$

где је [2.3],

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}, n \geq 0, \quad (2.7)$$

израз (2.5) постаје

$$\underline{z} = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \underline{w}^{4n+1} + C_3. \quad (2.8)$$

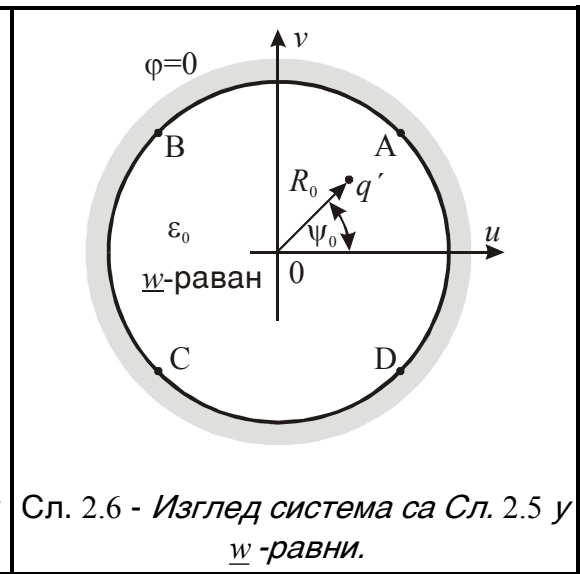
При томе је

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(1+4n)}. \quad (2.9)$$

Да би се одредила вредност претходно наведених израза усвојено је да је $(-1)!! = (0)!! = 1$.



Сл. 2.5 - Подужно наелектрисање у шупљини квадратног попречног пресека (\underline{z} -раван).



Сл. 2.6 - Изглед система са Сл. 2.5 у \underline{w} -равни.

Константе C_1 и C_3 одређују се из услова да је \underline{z} непарна функција по \underline{w} и да је $\underline{z}(\underline{w}=1) = a/2$. Коначно, израз (2.5) има облик,

$$\underline{z} = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \underline{w}^{4n+1}, \quad (2.10)$$

где је

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(1+4n)}. \quad (2.11)$$

Ред (2.11) је могуће сабрати и његова сума је $S = 0.927037338651$ [2.7]. Када се једначина (2.10) растави на реални и имагинарни део, добија се

$$x = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^{1+4n} \cos((1+4n)\psi) \quad \text{и} \quad (2.12)$$

$$y = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^{1+4n} \sin((1+4n)\psi). \quad (2.13)$$

Претходна два израза за $R=1$ представљају параметарске једначине попречног пресека шупљине. На Сл. 2.7а и 2.7б приказана су одступања приближног од стварног облика попречног пресека за двочлану (Сл. 2.7а), односно трочлану (Сл. 2.7б)

апроксимацију, задату изразом (2.10). Како се помоћу пресликавања (2.10) унутрашњост цилиндричне шупљине квадратног попречног пресека у \underline{z} -равни пресликава се на унутрашњост јединичног круга у \underline{w} -равни, то се тачка $\underline{z}_0 = c + jd$ у којој је смештено подужно наелектрисање q' , пресликава у тачку $\underline{w}_0 = R_0 e^{j\psi_0}$ у \underline{w} -равни. При томе је

$$\underline{z}_0 = c + jd = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \underline{w}_0^{4n+1}, \quad (2.14)$$

односно,

$$c = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R_0^{1+4n} \cos((1+4n)\psi_0) \text{ и} \quad (2.15)$$

$$d = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R_0^{1+4n} \sin((1+4n)\psi_0). \quad (2.16)$$

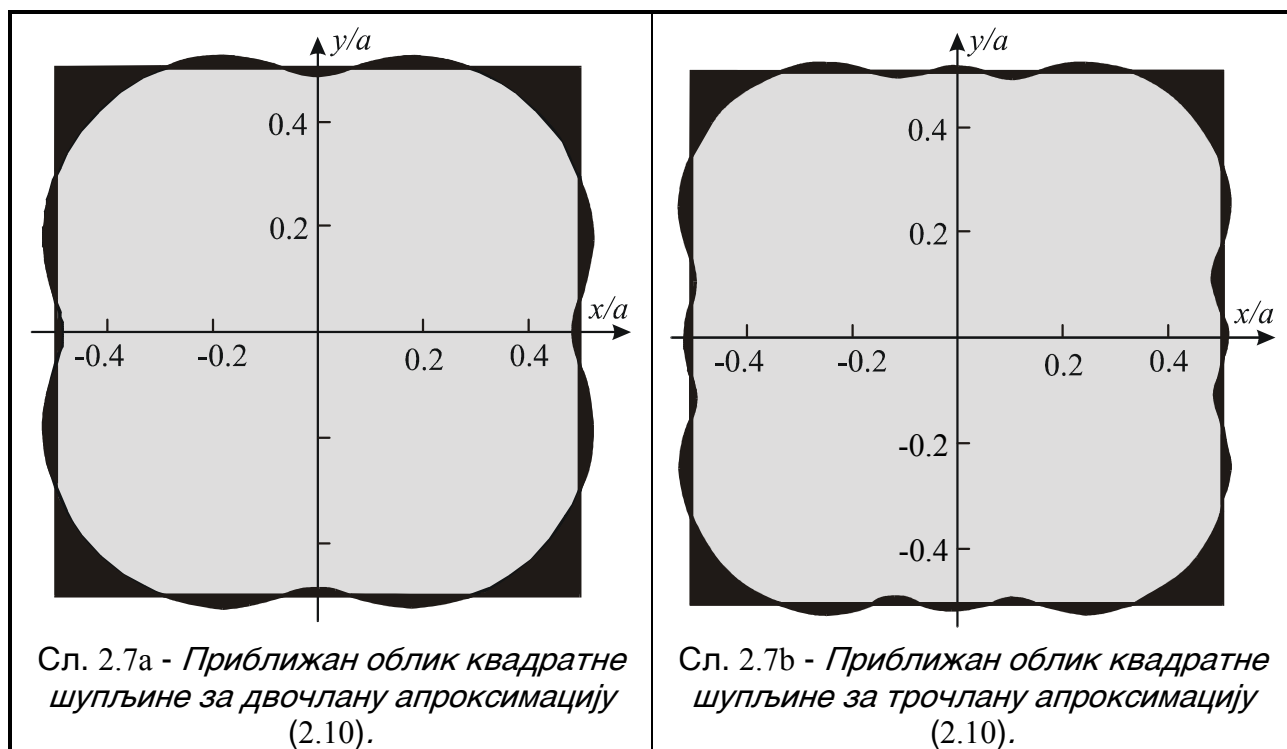


Таблица 2.1

итерација	R_0	ψ_0
0	0.282 843	0.785 398
1	0.268 771	0.839 487
2	0.253 676	0.822 230
3	0.252 660	0.771 613
4	0.262 119	0.755 820
5	0.267 584	0.776 668
10	0.263 383	0.781 134
15	0.262 472	0.783 940
20	0.262 326	0.784 980
25	0.262 310	0.785 299
30	0.262 324	0.785 378
35	0.262 328	0.785 396
40	0.262 330	0.785 400

Једначина (2.14) у општем случају решава се приближно нумерички и при томе се посматра функција

$$f(\underline{w}) = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \underline{w}^{4n+1} - \underline{z}_0. \quad (2.17)$$

Развојем функције (2.17) у Тејлоров ред у околини тачке \underline{w}_0 , при чему се у обзир узимају само прва два члана, на основу услова $f(\underline{w}_0) = 0$ генерише се итеративни поступак,

$$\underline{w}_0 \rightarrow \underline{w}_0 - \frac{f(\underline{w}_0)}{f'(\underline{w}_0)}. \quad (2.18)$$

У Таблици 2.1 приказани су резултати добијени применом образованог итеративног поступка када је $c = d = 0.1a$ [2.7]. При томе је за почетне вредности непознатих R_0 и ψ_0 усвојено,

$$R_0 = 2\sqrt{(c/a)^2 + (d/a)^2} \text{ и } \psi_0 = \arctg \frac{d}{c} = \frac{\pi}{4}. \quad (2.19)$$

Применом теореме лика у цилиндричном огледалу за комплексни потенцијал се добија,

$$\underline{\Phi} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(e^{j\psi_0} \frac{\underline{w}R_0 - e^{j\psi_0}}{\underline{w} - R_0 e^{j\psi_0}} \right), \quad (2.20)$$

док се електрични скалар потенцијал одређује из израза

$$\varphi = \text{Re}\{\underline{\Phi}\} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R^2 R_0^2 + 1 - 2RR_0 \cos(\psi - \psi_0)}{R^2 + R_0^2 - 2RR_0 \cos(\psi - \psi_0)}. \quad (2.21)$$

Интензитет електричног поља у унутрашњости шупљине могуће је одредити као

$$|\underline{E}| = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{z}} \right| = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right|. \quad (2.22)$$

Када се у претходни израз стави $R = 1$, добија се интензитет електричног поља на унутрашњој површини шупљине,

$$E = |\underline{E}| = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{z}} \right|_{R=1} = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right|_{R=1} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1 - R_0^2}{C_1} \frac{\sqrt{2|\cos(2\psi)|}}{1 + R_0^2 - 2R_0 \cos(\psi - \psi_0)}. \quad (2.23)$$

У изразу (2.23), C_1 је константа која се јавља у обрасцима (2.5) и (2.8) и одређена је као

$$C_1 = \frac{a}{2S}. \quad (2.24)$$

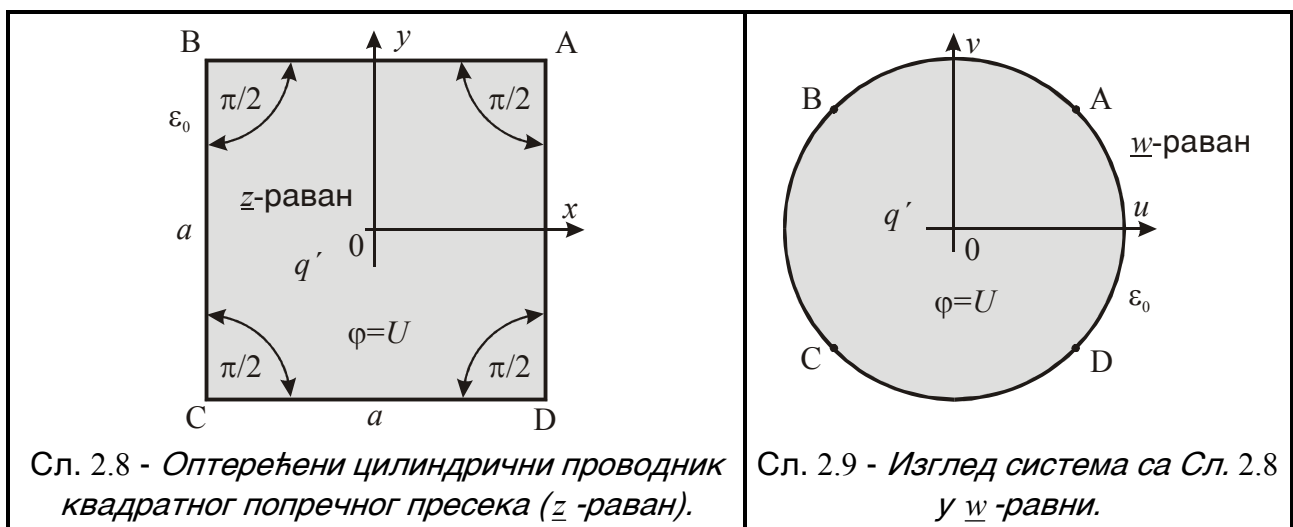
Посматрањем израза (2.23) може се уочити да је јачина електричног поља на месту оштрих усека шупљине (тачке А, В, С и D на Сл. 2.5) једнака нули. Овим тачкама одговарају вредности углава $\psi = \pm\pi/4$ и $\psi = \pm 3\pi/4$.

2.2.1.2 Цилиндрични проводник велике дужине и квадратног попречног пресека оптерећен подужним наелектрисањем

Применом Шварц-Кристофелове трансформације могуће је одредити потенцијал у околини цилиндричног проводника велике дужине и квадратног попречног пресека оптерећеног подужним наелектрисањем q' [2.7].

У овом случају примењује се пресликавање (2.4) помоћу којег се спољашњост квадратног проводника из \underline{z} -равни (Сл. 2.8) пресликава на спољашњост јединичног круга у \underline{w} -равни (Сл. 2.9). Како се ради о проводнику квадратног попречног пресека, параметри у изразу (2.4) имају вредности $N = 4$ и $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/2$, као и у одељку 2.2.1.1, Пресликавање (2.4) сада има облик,

$$\underline{z} = C_1 \int_1^{\underline{w}} \sqrt{1 + \frac{1}{\underline{w}^4}} d\underline{w} + C_2. \quad (2.25)$$



Када се на претходни израз примени развој

$$\left(1 + \frac{1}{\underline{w}^4}\right)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \underline{w}^{-4n}, \quad |\underline{w}| > 1, \quad (2.26)$$

при чему је

$$\binom{1/2}{n} = (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!}, \quad n \geq 0, \quad (2.27)$$

из израза (2.25) добија се

$$\underline{z} = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \underline{w}^{1-4n} + C_3, \quad (2.28)$$

где је

$$a_n = \frac{(2n-3)!!}{2^n n!(1-4n)}. \quad (2.29)$$

При томе је усвојено да је $-((-3)!!) = (-1)!! = (0)!! \equiv 1$.

Као и у случају шупљине квадратног облика, константе C_1 и C_3 одређују се на основу особине непарности функције $\underline{z}(\underline{w})$ и из услова $\underline{z}(\underline{w}=1) = a/2$. Коначан из-

раз за пресликавање којим се спољашњост квадратног проводника из \underline{z} -равни пресликава на спољашњост јединичног круга у \underline{w} -равни, је облика

$$\underline{z} = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \underline{w}^{1-4n}. \quad (2.30)$$

Како је $\underline{z} = x + jy$ и $\underline{w} = R e^{j\psi}$, на основу израза (2.30) може се написати,

$$x = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n R^{1-4n} \cos((1-4n)\psi) \text{ и} \quad (2.31)$$

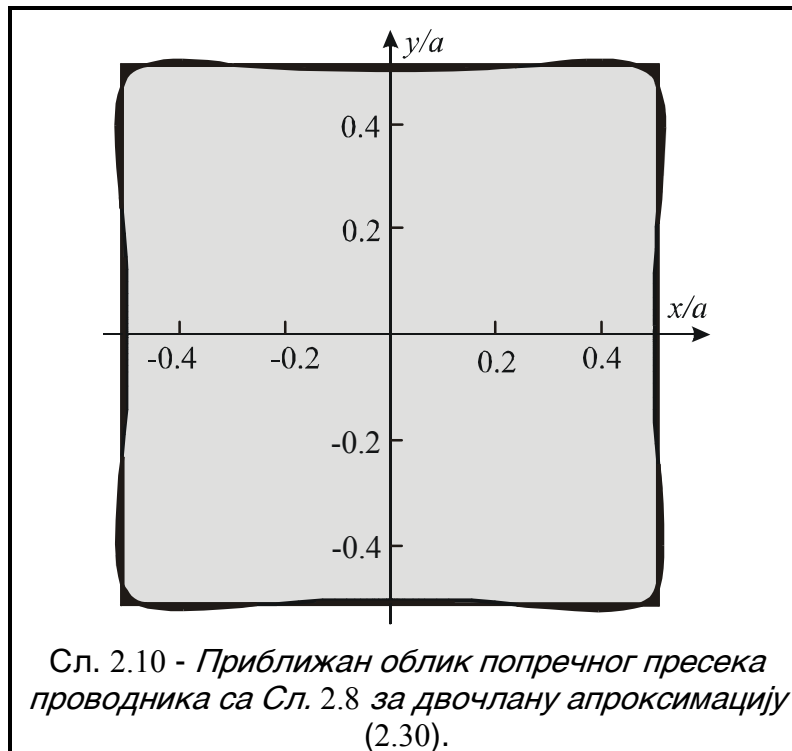
$$y = \frac{a}{2S} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n R^{1-4n} \sin((1-4n)\psi). \quad (2.32)$$

У горњим изразима, са S је означена сума

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!(1-4n)}, \quad (2.33)$$

коју је могуће одредити и чија је вредност, $S = 0.8472130479$ [2.7].

Када се у изразе (2.31) и (2.32) стави $R = 1$, добијају се параметарске једначине попречног пресека проводника.



На Сл. 2.10 приказан је попречни пресек проводника са Сл. 2.8 и његов приближан облик одређен помоћу двочлане апроксимације (2.30). Може се уочити да је апроксимација попречног пресека много боља него апроксимација истог реда добијена применом пресликавања (2.3) (Сл. 2.7).

Комплексни потенцијал у \underline{w} -равни има облик,

$$\underline{\Phi} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln w, \quad (2.34)$$

па је електрични скалар потенцијал

$$\varphi = \operatorname{Re}\{\underline{\Phi}\} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln R. \quad (2.35)$$

На великим удаљеностима од проводника је

$$\underline{z} = C_1 \underline{w} = \frac{a}{2S} \underline{w}, \text{ за } |z| \gg a \text{ и } |w| \gg 1. \quad (2.36)$$

Када се у обзир узме претходни израз, комплексни потенцијал постаје

$$\underline{\Phi} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2S\underline{z}}{a} = U - \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\underline{z}}{a_e}, \quad (2.37)$$

где је са

$$a_e = C_1 = \frac{a}{2S} \approx 0.590170300a \approx 0.59a, \quad (2.38)$$

означен еквивалентни полупречник проводника.

Јачину електричног поља у околини проводника могуће је, као и у претходном одељку одредити применом израза (2.22), док је интензитет електричног поља на површини електроде (за $R = 1$),

$$E = |\mathbf{E}| = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{z}} \right|_{R=1} = \left| \frac{d\underline{\Phi}}{d\underline{w}} \frac{d\underline{w}}{d\underline{z}} \right|_{R=1} = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0 a_e \sqrt{2|\cos(2\psi)|}}. \quad (2.39)$$

Из израза (2.39) се уочава да је интензитет електричног поља неограничено велики на оштрим ивицама проводника, у тачкама које одговарају вредностима углова $\psi = \pm\pi/4$ и $\psi = \pm 3\pi/4$ (тачке А, В, С и D на Сл. 2.9).

2.3. Закључак

На основу изложеног, може се закључити да је применом једног или више конформних пресликавања могуће дводимензионалне електростатичке проблеме у којима се јављају сложене геометрије (у овде разматраном примеру квадратни попречни пресек) свести на проблеме у којима фигуришу геометрије у којима је решавање проблема релативно једноставно (у конкретном случају кружни попречни пресек). У општем случају међутим, ово доводи до трансцендентних једначина које захтевају нумеричко решавање.

Литература

- [2.1] E. B. Christoffel: *Sui Problema delle Temperature Stazionarie e la Rappresentazione di una Data Superficie*, Ann. Mat. Pura Appl., 1, 1867, p.p. 95
- [2.2] H. A. Shwartz: *Über einige Abbildungsaufgaben*, J. reine Angew. Math., 70, 1869, p.p. 105
- [2.3] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York, 8th Printing, Government Printing Office, 10th Printing, 1972, p.p. 255-256, 822-825

- [2.4] Др Јован В. Сурутка: *Електромагнетика*, Грађевинска књига, Београд, 1989, стр. 122-143
- [2.5] Ronald Schinzinger, Patricio A. A. Laura: *Conformal Mapping: Methods and Applications*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1991, p.p. 60-71
- [2.6] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge: *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, John Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1995, p.p. 117-119 [a], 149-154 [b], 175-187[c]
- [2.7] Др Драгутин М. Величковић и сарадници: Злата Ж. Цветковић, Небојша Б. Рачевић, Саша С. Илић, Весна Л. Јавор, Ненад Н. Цветковић, Дијана Г. Зулкић: *Збирка решених испитних задатака из Електромагнетике - Први део*, Електронски факултет у Нишу, Ниш, 2000, стр. 129-136

3. ЛАМЕОВ МЕТОД И ЊЕГОВА ПРИМЕНА НА ПРОРАЧУН ВОДОВА ПОЛИГОНАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА ПРОВОДНИКА

3.1. О Ламеовом методу

Број електростатичких проблема код којих је расподела наелектрисања на површини проводног тела унапред позната није велики. У пракси се много чешће срећу проблеми код којих је неопходно на основу познавања геометрије тела и његовог укупног оптерећења (дакле не и његове расподеле), одредити вредност свих осталих величина од интереса. Метод функције облика, познат и као Ламеов метод применљив је управо код поменуте групе проблема, посебно ако је једначина површине тела које се посматра доступна у аналитичком облику. Значајно је нагласити да се применом Ламеовог метода решење проблема добија у затвореном облику. Поред метода функције облика, у групу метода којима се решава проблем електричног поља у околини усамљеног проводног тела спадају и општи поступак интеграције Лапласове једначине, метод интегралних једначина, метод конформних пресликавања и релаксациони метод.

Поменути метод, предложен у референци [3.1], заснован је на резултатима који се односе на услове које треба да задовољи једначина екипотенцијалне површине [3.3]. Метод се може применити на електродне системе смештене како у хомогеном [3.1], тако и у хетерогеном диелектрику [3.2].

3.2. Опис метода

3.2.1. Ламеов услов

Да би се одредили услови које одређена површина мора да задовољи да би се могла сматрати екипотенцијалном, посматра се породица површина задата изразом

$$f(\mathbf{r}) = C, \quad (3.1)$$

где је \mathbf{r} вектор положаја, док је C параметар, при чему свакој вредности параметра одговара један члан породице површина (3.1). Ако се претпостави да су површине које припадају породици површина (3.1) екипотенцијалне, тада свакој површини појединачно, поред конкретне вредности параметра $C = f_0$, одговара и одређена

вредност потенцијала $\varphi[f(r) = f_0]$. При томе, функција потенцијала мора да задовољи Лапласову једначину,

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.2)$$

Како је $\text{grad } \varphi = \varphi' \text{ grad } f$, Лапласова једначина у конкретном случају добија облик

$$\Delta\varphi = \varphi''(\text{grad } f)^2 + \varphi' \Delta f = 0, \quad (3.3)$$

при чему је $\varphi' = d\varphi/d f$ и $\varphi'' = d^2 \varphi/d f^2$. Из израза (3.3) добија се

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{\Delta f}{(\text{grad } f)^2}. \quad (3.4)$$

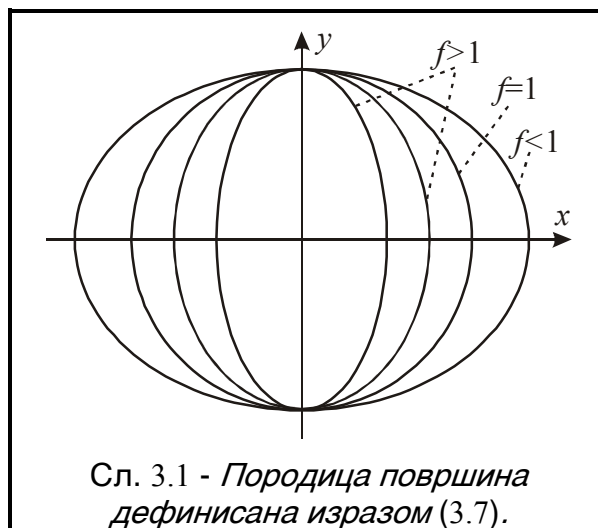
У претходним изразима претпостављено је да је параметар f , назван параметар екипотенцијалности [3.1], два пута диференцијабилан у свакој тачки простора. Пошто је лева страна претходног израза функција само једне променљиве f , то мора да важи и за његову десну страну. Математички формулисана, ова констатација представља Ламеов услов [3.1, 3.3],

$$g(f) = \frac{\Delta f}{(\text{grad } f)^2}, \quad (3.5)$$

где је

$$g(f) = -\frac{\varphi''}{\varphi'}. \quad (3.6)$$

Дакле, да би површине које припадају породици површина дефинисаној изразом (3.1) могле да буду третиране као екипотенцијалне, неопходно је да однос $\Delta f / (\text{grad } f)^2$ буде функција само променљиве f .



Више различитих породица може да садржи исту површину, при чему неке од породица испуњавају Ламеов услов, док са другима то није случај. У циљу илустрације претходне тврдње, биће посматрана површина веома дуге цилиндричне електроде полупречника a . За $r = a$, површина електроде припада породици површина

$$f(r = \sqrt{x^2 + y^2}) = r. \quad (3.7)$$

При томе је $\text{grad } f = \hat{r}$, $\Delta f = 1/r$ и $g = 1/r$, па је Ламеов услов задовољен.

Са друге стране, и породица површина задата изразом

$$fx^2 + y^2 = a^2, \quad (3.8)$$

за $f=1$ садржи површину посматране цилиндричне електроде (Сл. 3.1), али при томе Ламеов услов није испуњен.

Када је Ламеов услов задовољен, потенцијал се може одредити као

$$\varphi = A \int e^{-\int g(f) df} df + B, \quad (3.9)$$

док је електрично поље,

$$E = -\text{grad } \varphi = -\varphi' \text{grad } f = A \text{grad } f e^{-\int g(f) df}, \quad (3.10)$$

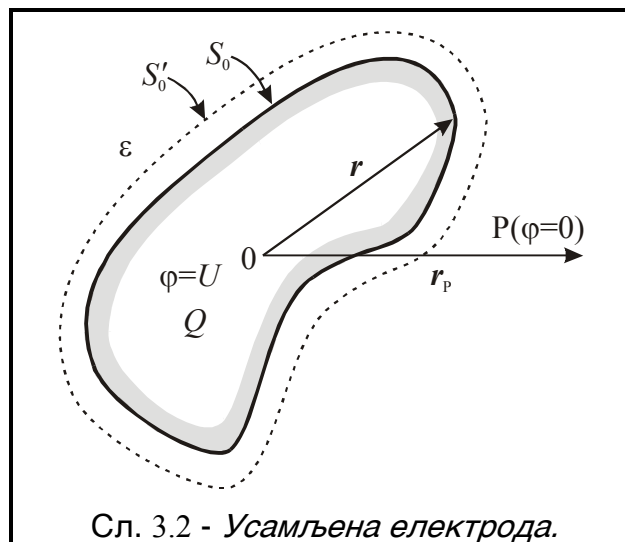
где су A и B константе интеграције.

3.2.2. Примена Ламеовог метода

У складу са предметом истраживања овог рада биће детаљније описана примена метода функције облика на электроду смештену у хомогеном, изотропном и линеарном диелектрику диелектричне константе ε , оптерећену наелектрисањем Q која се налази на потенцијалу U (Сл. 3.2). Са P је обележена референтна тачка, дефинисана вектором положаја r_p . При томе је претпостављено да породица екипотенцијалних површина којој припада и површина електроде S_0 има само један параметар екипотенцијалности f и дефинисан је однос

$$k = \frac{f \Delta f}{(\text{grad } f)^2}, \quad (3.11)$$

назван фактором облика [3.1].



Израз за потенцијал (3.9), може се сада написати у облику

$$\varphi = A \int e^{-\int k d(\ln f)} df + B. \quad (3.12)$$

Када је фактор облика константан, што је услов испуњен код велике групе проблема, потенцијал се, на основу претходно наведене формуле, може одредити помоћу израза

$$\varphi = \begin{cases} A \ln f + B, & k = 1. \\ \frac{A}{1-k} f^{1-k} + B, & k \neq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Константе интеграције A и B у изразима (3.12) и (3.13), одређују се из услова да се електрода налази на потенцијалу U , да површини електроде одговара параметар еквипотенцијалности $f = f_0$ и да је референтна еквипотенцијална површина нултог потенцијала одређена вредношћу параметра $f = f_p$ [3.1]. Након одређивања интеграционих константи, из израза (3.12) за потенцијал се добија

$$\varphi = U \frac{\int_{f_p}^f e^{-f^k} d(\ln f) df}{\int_{f_p}^{f_0} e^{-k} d(\ln f) df}, \quad (3.14)$$

док за константни фактор облика, израз (3.13) има облик

$$\varphi = \begin{cases} U \frac{\ln(f/f_p)}{\ln(f_0/f_p)}, & k = 1. \\ U \frac{(f^{1-k} - f_p^{1-k})}{(f_0^{1-k} - f_p^{1-k})}, & k \neq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Када се ради о електроди коначних димензија дефинисаној затвореном површином S_0 , константа A може се одредити применом Гаусове теореме на површину електроде, па је тада, у општем случају [3.1],

$$A = -\frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \left[e^{-\int^k d(\ln f)} \right]_{f=f_0} \times \iint_{S_0 \rightarrow S'_0} \text{grad } f \, d\mathbf{S} \right\}^{-1}, \quad (3.16)$$

или у облику погоднијем за прорачун,

$$A = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left\{ \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ f \rightarrow f_\infty}} \left[\frac{e^{\int^k d(\ln f)}}{r(\mathbf{r} \text{ grad } f)} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

У случају константног фактора облика, изрази (3.16) и (3.17) имају облик

$$A = -\frac{Q}{\varepsilon} f_0^k \left(\iint_{S_0 \rightarrow S'_0} \text{grad } f \, d\mathbf{S} \right)^{-1}, \quad (3.18)$$

односно,

$$A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left\{ \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ f \rightarrow f_\infty}} \left[\frac{f^k}{r(\mathbf{r} \text{ grad } f)} \right] \right\}. \quad (3.19)$$

У претходним изразима је са f_∞ означен параметар еквипотенцијалности за удаљену еквипотенцијалну површину, ($f_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} f$), док је са S'_0 обележена површина тесно приљубљена уз површину електроде ($S'_0 \rightarrow S_0$).

Од значаја је навести и чињеницу да се метод функције облика може применити само на проблеме у којима фигуришу површине чији је фактор облика константан или је функција параметра еквипотенцијалности [3.1].

3.2.3. Теореме везане за примену Ламеовог метода

У тексту који следи биће без доказа наведене неке од теорема које се односе на Ламеов метод, на основу којих се у појединим случајевима његова примена може значајно упростити. Изложене теореме директно су преузете из [3.1].

Теорема 1: Уколико је параметар f параметар еквипотенцијалности за једну породицу површина, тада је и произвољна, два пута диференцијабилна функција $\psi(f)$ такође параметар еквипотенцијалности исте породице површина, при чему је одговарајући фактор облика k_ψ ,

$$k_\psi = \frac{\psi \Delta \psi}{(\text{grad } \psi)^2}. \quad (3.20)$$

Последица Теореме 1 је да једној те истој електроди може бити асоциран неограничено велики број параметара еквипотенцијалности и њима одговарајућих фактора облика, који су названи параметрима еквипотенцијалности, односно факторима облика исте врсте. Из наведене теореме такође се може закључити да проводним телима различите форме могу да одговарају једнаки фактори облика.

Теорема 2: Увек се може дефинисати пресликавање којим је могуће породицу еквипотенцијалних површина без иједног параметра еквипотенцијалности, из r простора, прсликати у породицу еквипотенцијалних површина која поседује бар један параметар еквипотенцијалности у R простору. При томе је потребан и довољан услов, да фактор облика k_R асоциран параметру еквипотенцијалности f_R у R простору буде константан или функција параметра еквипотенцијалности f_R .

Као једна од последица Теореме 2, изведен је закључак да постоји бар један простор (координатни систем) у којем се може применити Ламеов метод.

Ако је пресликавање поменуто у Теореме 2 конформно, и ако је k_r фактор облика који одговара параметру еквипотенцијалности f_r у r простору, тада је фактор облика k_R , асоциран параметру еквипотенцијалности f_R у R простору,

$$k_R = k_r [r = R, f_r(r = R)], \quad (3.21)$$

што пружа потенцијално велике олакшице при решавању конкретних проблема, јер је применом конформних пресликавања могуће поједноставити поједине проблеме сложених геометрија.

Теорема 3: Уколико су фактори облика k_i који одговарају параметрима еквипотенцијалности f_i једнаки нули,

$$k_i = 0, \quad (3.22)$$

тада је и фактор облика k асоциран параметру еквипотенцијалности f , који је линеарна комбинација параметара f_i ,

$$f = \sum_i f_i, \quad (3.23)$$

такође једнак нули ($k = 0$).

Теорема 4: Када су фактори облика k_i који одговарају параметрима еквипотенцијалности f_i једнаки нули,

$$k_i = 0, \quad (3.24)$$

тада је и фактор облика k асоциран параметру еквипотенцијалности f , који представља производ параметара f_i ,

$$f = \prod_i f_i, \quad (3.25)$$

такође једнак нули ($k = 0$).

3.2.4. Примена Ламеовог метода на електроде у хетерогеном диелектрику

Претходно излагање се у целости односило на примену метода функције облика у хомогеном диелектрику. У тексту који следи, у складу са чињеницом да то није од већег значаја за предмет истраживања овог рада, биће само укратко наведени услови који морају да буду испуњени да би се Ламеов метод применио на електродне системе смештене у хетерогеном диелектрику.

Неопходни услови за примену метода функције облика на електродне системе који су окружени хетерогеним диелектриком су [3.2]:

- да површине дисконтинуитета (површине електрода и површине које раздвајају диелектричне слојеве различитих диелектричних константи) припадају породици еквипотенцијалних површина. Тада постоји бар један параметар еквипотенцијалности, при чему је њему асоцирани фактор облика или константан или функција параметра еквипотенцијалности;

- да је релативна диелектрична константа произвољног диелектричног слоја који окружује електродни систем константна (хомогени диелектрични слој) или је функција параметра еквипотенцијалности.

Када су наведени услови испуњени, решење посматраног проблема добија се у затвореној форми.

3.3. Приближан прорачун водова полигоналног попречног пресека проводника применом Ламеовог метода

Један од начина да се омогући примена метода функције облика на електродне системе код којих није испуњен Ламеов услов јесте директна апроксимација еквипотенцијалних површина "коришћењем подесно одабраних функција које испуњавају Ламеов услов" [3.4]. На овој идеји заснива се један нов приближни нумерички поступак за решавање електростатичких проблема, први пут предложен у референци [3.4]. Након апроксимирања еквипотенцијалних површина, потенцијал и електрично поље одређују се на начин описан у одељцима 3.2.1 и 3.2.2. Предложени метод примењен је и на решавање једног броја водова различитог попречног пресека проводника [3.5-3.8].

3.3.1. Апроксимација еквипотенцијала

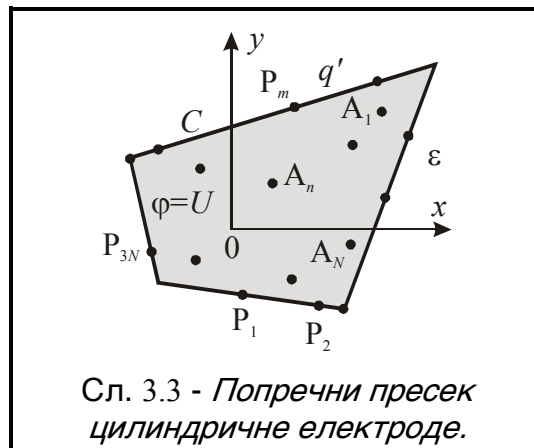
Да би се објаснио поступак апроксимације еквипотенцијалних површина који омогућава примену метода функције облика, посматра се цилиндрична електрода попречног пресека приказаног на Сл. 3.3 [3.4, 3.5].

Једначина еквипотенцијалних површина претпостављена је у форми коначног производа,

$$f = \prod_{n=1}^N f_n^{\alpha_n} = C^{te}, \quad (3.26)$$

где су са f_n означени фактори,

$$f_n = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.27)$$



У претходном изразу (3.27), x_n и y_n су координате тачака $A_n(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ које су смештене у унутрашњости електроде (Сл. 3.3). Непознати параметри α_n , $n = 1, 2, \dots, N$, као и координате x_n и y_n , $n = 1, 2, \dots, N$, одређују се из услова да је вредност параметра f на контури попречног пресека проводника C ,

$$f = C_1. \quad (3.28)$$

Како је потребно одредити укупно $3N$ непознатих величина ($x_n, y_n, \alpha_n, n = 1, 2, \dots, N$), подешавањем у $3N$ тачака P_m , $m = 1, 2, \dots, 3N$ смештених на контури C , формира се систем нелинеарних једначина,

$$f(P_m) = C_1, \quad m = 1, 2, \dots, 3N. \quad (3.29)$$

Важно је нагласити да се тачке подешавања могу одабрати и на глатким и на оштрим деловима проводника, што представља добру особину предложеног метода. Породица површина (3.26) задовољава Ламеов услов, при чему је

$$g(f) = \frac{\Delta f}{(\text{grad } f)^2} = \frac{1}{f}. \quad (3.30)$$

Израз за потенцијал сада има облик,

$$\varphi = A \ln f + B = A \sum_{n=1}^N \alpha_n \ln[(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2] + B. \quad (3.31)$$

Константа A у претходном изразу одређује се из релације

$$q' = -\pi\epsilon A \sum_{n=1}^N \alpha_n, \quad (3.32)$$

где је q' подужно наелектрисање електроде, док се константа B одређује на основу избора референтне тачке.

3.3.1.1 Апроксимација квадратног попречног пресека

Начин примене предложеног метода, илустрован је на примеру усамљене цилиндричне електроде квадратног попречног пресека, странице 2а [3.1]. Најједноставнија апроксимација еквипотенцијалних површина, у овом се случају остварује коришћењем функције,

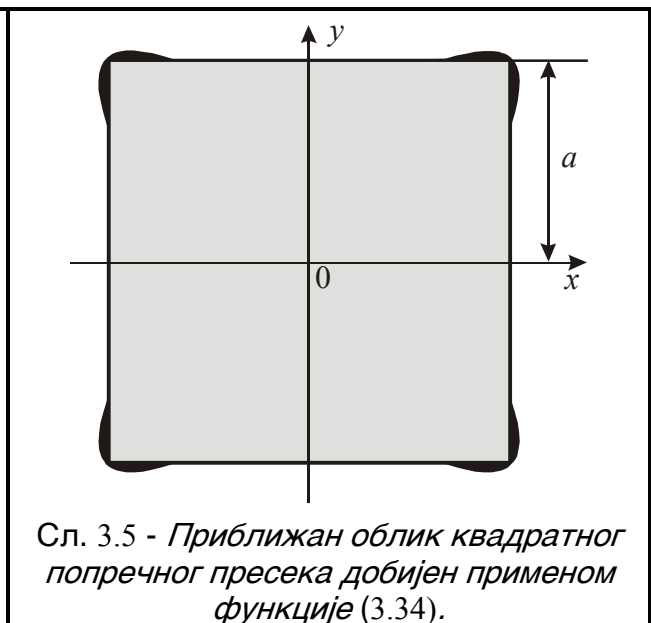
$$f = \frac{(x-d)^2 + (y-d)^2}{(a-d)^2 + d^2} \frac{(x+d)^2 + (y-d)^2}{(a+d)^2 + d^2} \frac{(x-d)^2 + (y+d)^2}{(a-d)^2 + d^2} \frac{(x+d)^2 + (y+d)^2}{(a+d)^2 + d^2}, \quad (3.33)$$

при чему је $d = a\sqrt[3]{3/8}$. Попречни пресек електроде и њен приближан облик добијен применом функције (3.33) приказани су на Сл. 3.4. Може се уочити да је одступање од стварног облика електроде највеће у околини темена квадрата.

Апроксимација квадратног попречног пресека може се извршити и помоћу функције

$$f = \frac{(x-d_1)^2 + (y-d_1)^2}{(a-d_1)^2 + d_1^2} \frac{(x+d_1)^2 + (y-d_1)^2}{(a+d_1)^2 + d_1^2} \frac{(x-d_1)^2 + (y+d_1)^2}{(a-d_1)^2 + d_1^2} \frac{(x+d_1)^2 + (y+d_1)^2}{(a+d_1)^2 + d_1^2} \times \left(\frac{(x-d_2)^2 + (y-d_2)^2}{(a-d_2)^2 + d_2^2} \frac{(x+d_2)^2 + (y-d_2)^2}{(a+d_2)^2 + d_2^2} \frac{(x-d_2)^2 + (y+d_2)^2}{(a-d_2)^2 + d_2^2} \frac{(x+d_2)^2 + (y+d_2)^2}{(a+d_2)^2 + d_2^2} \right)^\alpha, \quad (3.34)$$

где је $d_1 = 0.4554365712749408a$, $d_2 = 0.9332914452456762a$ и $\alpha = 0.8274257114400358$.

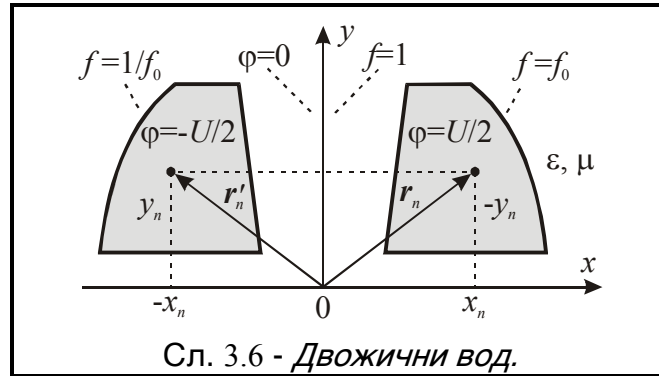


У овом случају, грешка у апроксимацији попречног пресека електроде, приказана на Сл.3.5, мања је него у случају апроксимације остварене помоћу функције (3.33). Одступање од стварног облика електроде је, као и у претходном случају, најизраженије у околини темена квадратног попречног пресека.

3.3.2. Прорачун водова полигоналног попречног пресека

Када се поступак претходно описан у одељку 3.3.1, примењује на двојични вод (Сл. 3.6) [3.5-3.8], једначина еквипотенцијалних површина се, као и у случају усамљене електроде претпоставља у облику израза (3.26), при чему су фактори у производу,

$$f_n = \frac{(r - r'_n)}{(r - r_n)} = \frac{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.35)$$



У симетралној равни вода $x = 0$, параметар f има вредност $f = 1$, на површини левог проводника његова вредност је $f = 1/f_0$, док је на десном проводнику $f = f_0$. Потенцијал се одређује из израза

$$\varphi = \frac{U \ln f}{2 \ln f_0}. \quad (3.36)$$

На основу (3.36) могуће је одредити вектор електричног поља,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (3.37)$$

као и вектор магнетног поља,

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} \sqrt{\epsilon/\mu}, \quad (3.38)$$

где је ϵ диелектрична константа, а μ магнетна пермеабилност средине у којој се вод налази. При томе је $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}$. Подужна капацитивност вода се одређује као

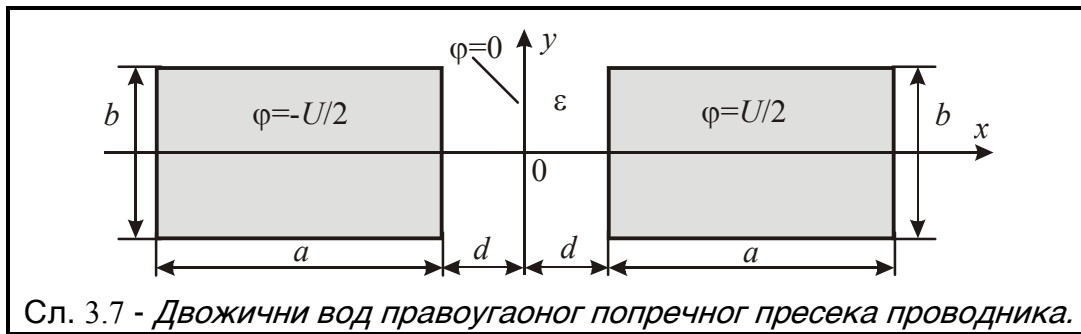
$$C' = \frac{\pi\epsilon}{\ln f_0} \sum_{n=1}^N \alpha_n. \quad (3.39)$$

3.3.2.1 Вод са проводницима правоугаоног попречног пресека

Описани поступак апроксимације еквипотенцијала примењен је на вод са проводницима правоугаоног попречног пресека, приказан на Сл. 3.7 [3.5-3.7].

Како у овом случају постоји симетрија у односу на равни $x = 0$ и $y = 0$, фактори f_n , $n = 1, 2, \dots, N$ у изразу (3.26) имају облик,

$$f_n = \frac{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \frac{(x + x_n)^2 + (y + y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y + y_n)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.40)$$



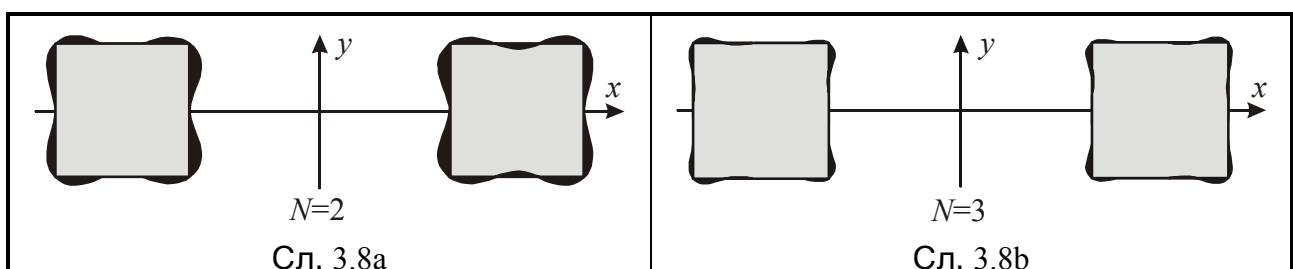
Када се за посматрани вод формира систем једначина (3.29), његовим решавањем добијају се вредности величина α_n , x_n и y_n , $n = 1, 2, \dots, N$, приказане у Таблици 3.1. При томе је $a = b = d$, док број чланова у производу (3.26) N , узима различите вредности.

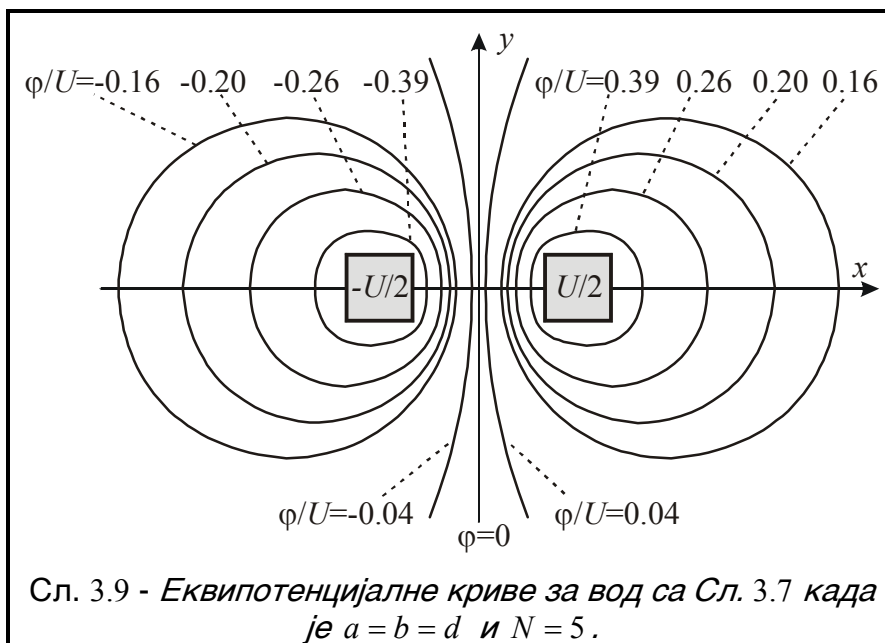
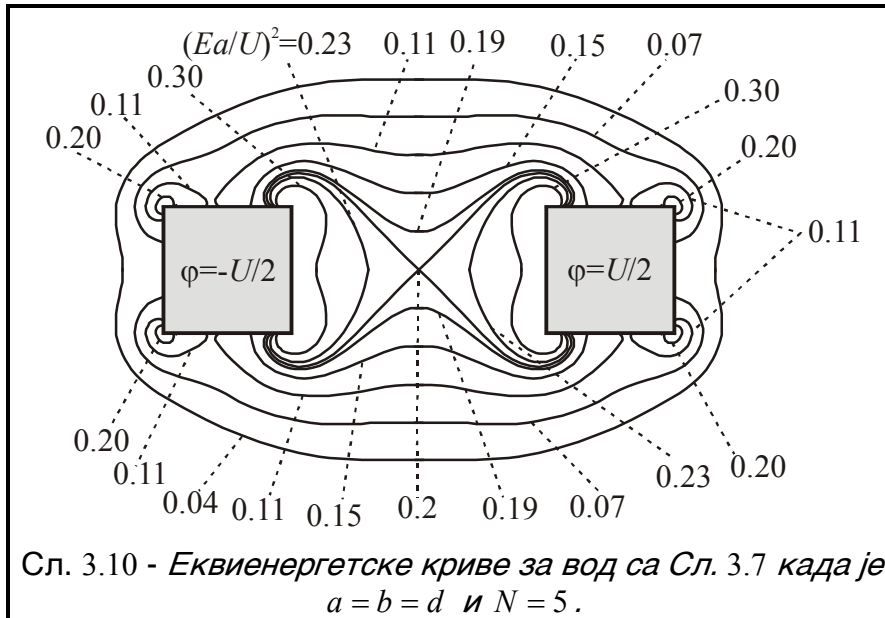
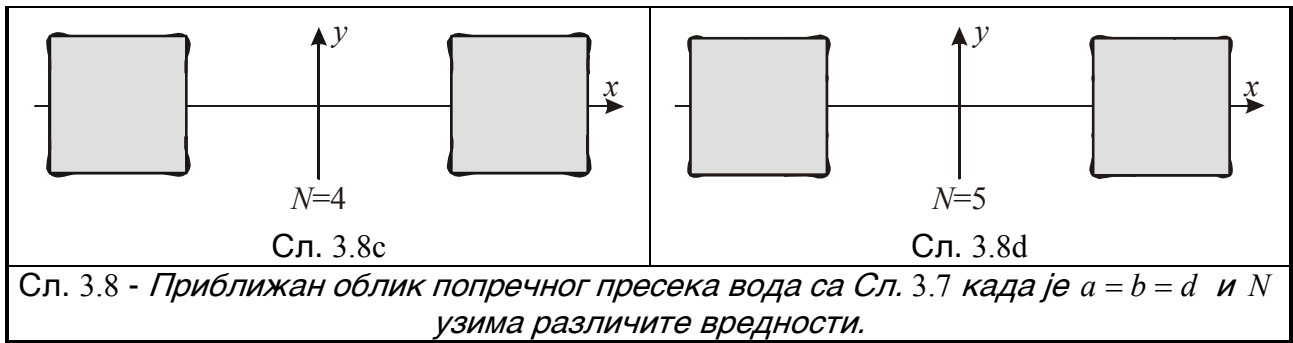
Таблица 3.1

N	n	α_n	x_n/a	y_n/a
2	1	0.214 817 691	1.063 585 760	0.361 754 450
	2	0.115 312 721	1.894 150 398	0.401 104 432
3	1	0.119 128 104	1.030 826 784	0.437 275 648
	2	0.132 152 399	1.381 732 038	0.014 021 238
	3	0.069 585 344	1.938 824 418	0.458 822 450
4	1	0.094 660 961	1.028 351 232	0.459 610 567
	2	0.117 965 461	1.239 799 658	0.189 521 924
	3	0.054 137 807	1.722 469 883	0.265 551 095
	4	0.051 718 981	1.960 558 490	0.472 769 890
5	1	0.039 991 742	1.976 127 574	0.478 097 896
	2	0.054 180 180	1.149 017 751	0.278 541 013
	3	0.081 741 242	1.027 626 355	0.471 585 205
	4	0.100 089 460	1.368 380 808	0.058 100 751
	5	0.041 447 532	1.806 317 343	0.340 793 958

Грешка начињена при приближном одређивању контуре попречног пресека проводника, за различите вредности N приказана је на Сл. 3.8a-d. Може се уочити да је грешка највећа у околини темена попречног пресека проводника и да (што је потпуно разумљиво), опада са порастом броја чланова у производу (3.26). Ваља напоменути да би грешка била већа да подешавање није извршено у теменима контура на које се ослања попречни пресек вода.

Контуре екипотенцијалних и еквиенергетских површина у околини вода са Сл. 3.7 одређених применом описаног метода, када је $a = b = d$ и $N = 5$ приказане су на Сл. 3.9 и 3.10, респективно. Еквиенергетске површине дефинишу се као геометријска места тачака константног интензитета електричног поља, односно сталне запреминске густине енергије електростатичког поља.





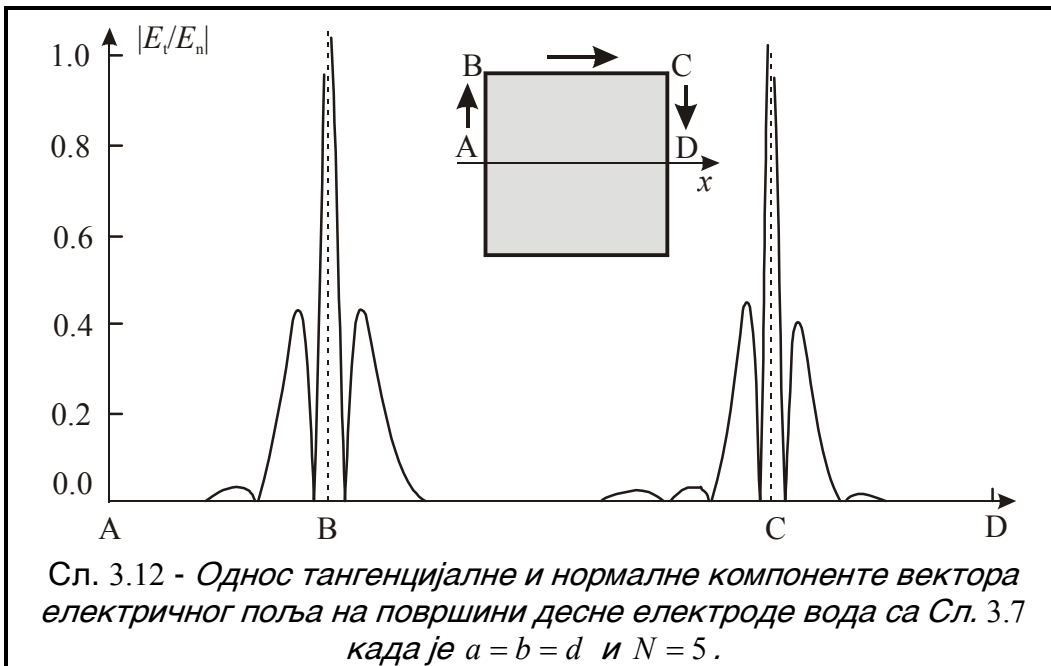
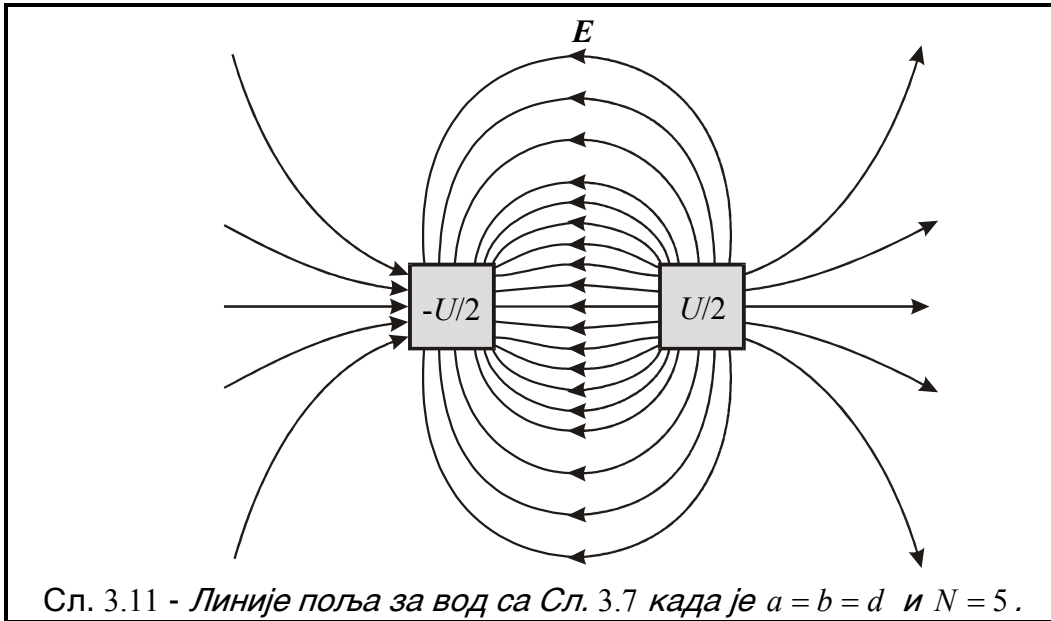
У Таблици 3.2 приказане су нормализоване вредности подужне капацитивности вода са Сл. 3.7, одређене за $d = a$ и различит број фактора у производу (3.26).

Таблица 3.2

N	$C'/2\pi\epsilon$
2	0.330 130
3	0.320 866

4	0.318 483
5	0.317 450

Изглед линија електричног поља за вод са Сл. 3.7, када је $d = a$ и $N = 5$, приказан је на Сл. 3.11. График на Сл. 3.12 представља модуо односа тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на горњем делу површине десног проводника вода са Сл. 3.7, одређен применом описаног метода за $d = a$ и $N = 5$.

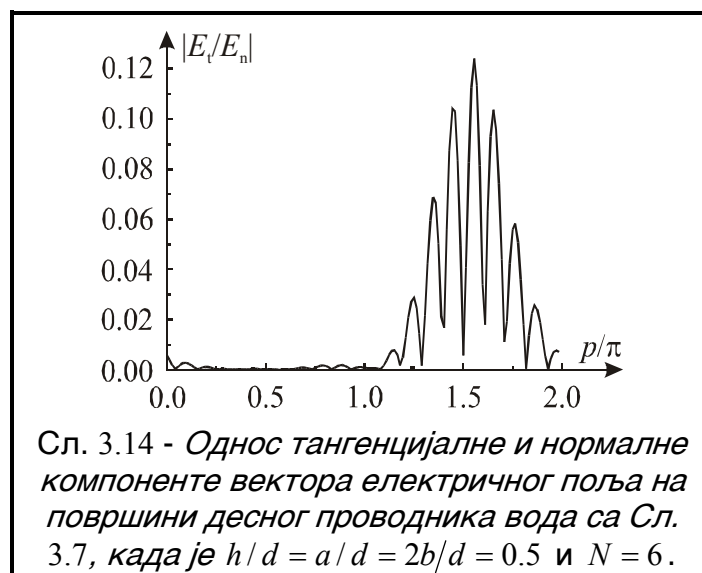
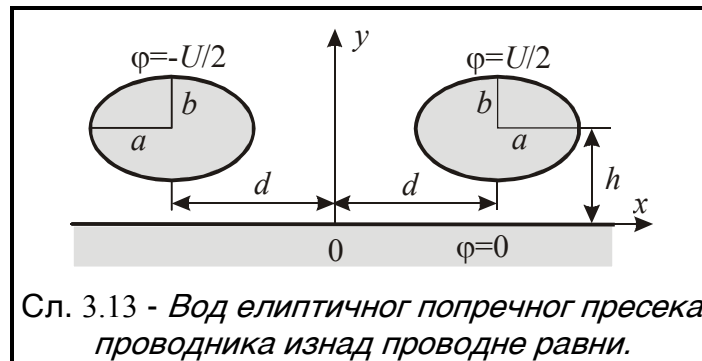


Са Сл. 3.12 може се уочити да услов да тангенцијална компонента електричног поља на површини проводника буде много мања од нормалне компоненте није испуњен у околини темена правоугаоне контуре. Ово је недостатак метода који би био мање уочљив да је број чланова у производу (3.26) већи. То међутим захтева решавање система нелинеарних једначина вишег реда.

Поменути проблем је мање изражен када се применом описаног метода апроксимирају попречни пресеци глатких електрода. У циљу илустрације ове тврдње, посматра се двожични вод са проводницима елиптичног попречног пресека смештен изнад проводне равни (Сл. 3.13) [3.7, 3.8]. Када се на овакав вод примењује

предложена процедура, екипотенцијалне површине претпостављају се у облику производа (3.26), при чему, обзиром на присутну симетрију, фактори у производу имају облик,

$$f_n = \frac{(x - x_n)^2 + (y + y_n)^2}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \frac{(x + x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(x + x_n)^2 + (y + y_n)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.41)$$



Параметарске једначине елипсе на коју се ослања попречни пресек десног проводника вода са Сл. 3.13 су

$$x = d + a \cos p \quad \text{и} \quad y = h + b \sin p. \quad (3.42)$$

На Сл. 3.14 приказан је однос тангенцијалне и нормалне компоненте електричног поља на површини десног проводника посматраног вода одређен применом предложене процедуре. При томе су димензије вода $h/d = a/d = 2b/d = 0.5$, док је у производу (3.26) присутно укупно $N = 6$ фактора [3.8]. Са графика се уочава да је услов да је тангенцијална компонента по интензитету много мања од нормалне компоненте електричног поља, задовољен на највећем делу површине електроде, осим у појединим тачкама где је добијени однос интензитета тангенцијалне и нормалне компоненте нешто већи од 0.12. Са повећањем броја фактора у производу (3.26), посматрани однос се смањује.

3.4. Закључак

У овом поглављу разматран је метод функције облика (Ламеов метод). Наведени су услови и описан начин његове примене на усамљену електроду у хомогеном диелектрику [3.1]. Такође су набројани и неопходни услови за примену описаног метода на проводно тело у хетерогеном диелектрику [3.2].

Описан је и један нов приближан нумерички поступак за решавање електро-статичких проблема заснован на директној апроксимацији еквипотенцијалних површина помоћу "подесно одабраних функција које испуњавају Ламеов услов" [3.4]. Овај поступак омогућава примену метода функције облика на системе код којих тај услов није испуњен, па се Ламеов метод не може директно применити [3.5-3.8].

Добра особина описаног метода је да се решење за потенцијал добија у затвореном облику. Такође се може констатовати одсуство компликованијих математичких израчунавања као што је нпр. нумеричка интеграција, присутних код неких других метода. Метод се може применити и на електроде које имају оштре ивице. Наравно, апроксимација и добијени резултати утолико су тачнији, уколико је број чланова у примењеној апроксимацији већи.

Недостатак разматраног метода је неопходност решавања система нелинеарних једначина што је проблем који посебно долази до изражаја када је примењена апроксимација вишег реда.

Литература

- [3.1] Драгутин М. Величковић: *О једном новом методу решавања проблема електростатике*, Годишњак Техничког факултета у Нишу, 1970/71, стр. 133-162
- [3.2] Драгутин М. Величковић: *Примена метода функције облика на електродне системе окружене хетерогеним диелектриком*, Научни подмладак, година III, број 2-3, Ниш, 1971, стр. 53-67
- [3.3] William R. Smythe: *Static and dynamic electricity*, Third edition, Revised printing, A Summa Book, Hemisphere publishing corporation, A member of the Taylor & Francis Group, New York-Washington-Philadelphia-London, 1989, p.p. 121-122
- [3.4] Драгутин М. Величковић, *Приближно нумеричко решавање електростатичких проблема помоћу Ламеовог метода*, XXXIX Конференција ЕТРАН, Златибор, 6-9. јун, 1995, Зборник радова, Свеска II, стр. 282-285
- [3.5] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Примена Ламеовог метода при прорачуну електромагнетног поља водова*, Четврти интернационални симпозијум из примењене електростатике ПЕС '96, Ниш, 22-24. мај, 1996, Зборник радова, стр. 65-68 [2.5]
- [3.6] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Приближан прорачун електромагнетног поља водова помоћу Ламеовог метода*, ТЕЛФОР '96, Београд, 26-29. новембар, 1996, Зборник радова, стр. 498-501
- [3.7] Veličković D. M., Cvetković N. N.: *Lame's Method in Approximate Numerical Solving of Plan-Parallel Electrostatic Problems*, 7th International IGTE Symposium, Graz, Austria, September 23-26, 1996, Proceedings of Papers, p.p. 420-423.
- [3.8] Ненад Н. Цветковић: *Двожични вод елиптичног попречног пресека проводника изнад проводне равни*, XLII Конференција ЕТРАН, Врњачка Бања, 2-5. јун, 1998, Зборник радова, Свеска II, стр. 282-285

4. ПРОРАЧУН ВОДОВА ПОЛИГОНАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА ПРИМЕНОМ МЕТОДА ЕКВИВАЛЕНТНЕ ЕЛЕКТРОДЕ

4.1. О методу еквивалентне електроде

Метод еквивалентне електроде (МЕЕ) је нов, нумерички метод развијен на Електронском факултету у Нишу, намењен приближном прорачуну потенцијалних поља теоријске физике, укључујући и квазистационарно електромагнетно поље [4.8]. Метод је дао задовољавајуће резултате код примене у анализи електростатичког и магнетостатичког поља, у теорији нискофреквентних уземљивачких система, као и код прорачуна водова. И неки други проблеми потенцијалних поља, као што су проблеми провођења топлоте и протока флуида решени су помоћу МЕЕ [4.8].

Предложени метод заснован је на идеји да се електрода произвољног облика "замени еквивалентним системом састављеним од коначног броја тзв. еквивалентних електрода" [4.8]. Тако се анализа посматраног електродног система своди на решавање већег броја лакше решивих проблема.

Облик, димензије и положај еквивалентних електрода (ЕЕ) одређују се тако да у потпуности замене посматрани електродни систем. Зависно од геометрије проблема за чије се решавање примењује МЕЕ, еквивалентна електрода може да буде равна или овална трака, ако се ради о планпаралелним проблемима, сфера, ако се метод примењује на тродимензионалне проблеме, или танка тороидална трака, у случају аксијално симетричних система. Еквивалентне електроде се смештају по површини проводника, при чему је полупречник еквивалентне електроде једнак еквивалентном полупречнику дела електроде који конкретна ЕЕ замењује. Систем линеарних једначина, у којем као непознате фигуришу наелектрисања ЕЕ формира се из услова да су потенцијал и наелектрисање еквивалентне електроде једнаки потенцијалу, односно наелектрисању дела електроде субституисаног еквивалентном електродом. Прорачун осталих величина од интереса врши се након одређивања наелектрисања еквивалентних електрода, на начин заснован на стандарним процедурама. Када се посматрани електродни систем састоји од већег броја електрода или је смештен у слојевитој средини, погодна је у неким случајевима користити Гринове функције за поједине електроде, односно слојевите средине, а остале електроде електродног система заменити еквивалентним електродама [4.8].

У формалном смислу, метод еквивалентне електроде сличан је методу момената. Битна разлика међутим, постоји у физичким основама ових метода, као и у начину формирања матрица. Важно је истаћи да примена МЕЕ не захтева нумеричку интеграцију било које врсте, за разлику од метода момената, код кога је неопходно одредити вредност појединих нетабличних интеграла који садрже сингуларне подинтегралне функције [4.8].

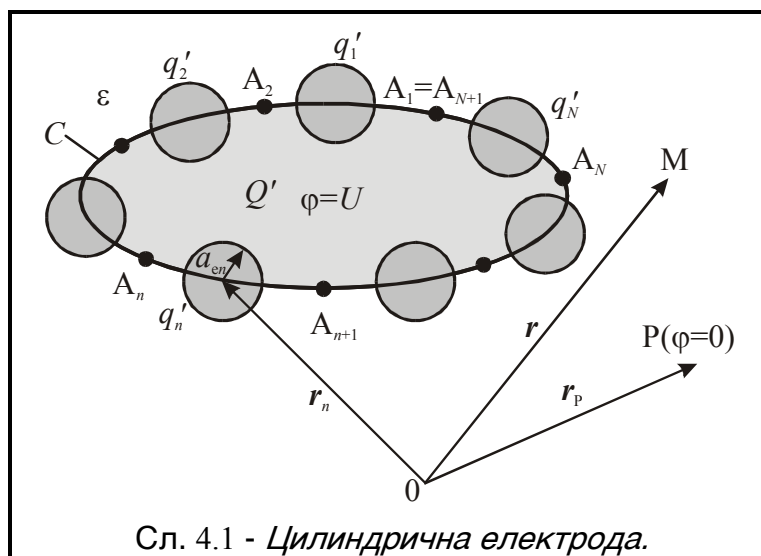
У односу на метод фиктивних извора, основна разлика између ова два метода лежи у чињеници да се код МЕЕ наелектрисања, односно ЕЕ смештају на површини електроде, док се код метода фиктивних извора то чини унутар електроде.

4.1.1. Опис метода

Примена МЕЕ илустрована је, без утицаја на општост излагања, на примеру глатке усамљене електроде произвољног попречног пресека и неограничене дужине, која се налази на потенцијалу $\varphi = U$ у односу на изабрану референтну тачку (Сл. 4.1) [4.8]. При томе, потенцијал на површини електроде задовољава Лапласову једначину,

$$\Delta\varphi = 0. \quad (4.1)$$

На контури C , на коју се ослања попречни пресек посматране електроде, произвољно је одабрано N тачака означених са A_n , $n=1,2,\dots,N$ ($A_{N+1} = A_1$). Површина електроде замењена је системом од N тракастих електрода смештених између тачака A_n и A_{n+1} , ширине l_n , $n=1,2,\dots,N$, при чему је њихов потенцијал једнак потенцијалу електроде U [4.8].



Са q'_n означено је подужно оптерећење тракасте електроде смештене између тачака A_n и A_{n+1} . Укупно оптерећење електроде једнако је суми подужних наелектрисања тракастих електрода q'_n , $n=1,2,\dots,N$, односно

$$Q' = \sum_{n=1}^N q'_n. \quad (4.2)$$

Тракасте електроде могу се заменити цилиндричним проводницима кружног попречног пресека, еквивалентног полупречника a_{en} , $n=1,2,\dots,N$. Цилиндричне електроде налазе се на потенцијалу U , док је њихово подужно наелектрисање јед-

нако подужним оптерећењима тракастих електрода q'_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Еквивалентни полупречник равне тракасте електроде дужине d је $a_e = d/4$. У случају овалне тракасте електроде којој одговара угао 2α , еквивалентни полупречник је $a_e = a \sin(\alpha/2)$ [4.8].

Дакле, електрода са Сл. 4.1 може да се замени кавезастом структуром коју сачињава N ЕЕ. Потенцијал у околини овог система се сада може написати као

$$\varphi = \sum_{n=1}^N q'_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), \quad (4.3)$$

где је са

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \quad (4.4)$$

обележена Гринова функција усамљеног подужног наелектрисања. При томе је \mathbf{r} вектор положаја тачке у којој се одређује потенцијал (тачка М на Сл. 4.1), са \mathbf{r}_n означен је вектор положаја средишње тачке (барицентра) траке или ЕЕ, \mathbf{r}_p је вектор положаја референтне тачке, док је ϵ диелектрична константа средине у којој је електрода смештена.

Систем једначина код примене МЕЕ формира се из услова да је потенцијал ЕЕ једнак потенцијалу проводника U ,

$$U = \sum_{n=1}^N q'_n G_{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Решења овог система су вредности оптерећења ЕЕ q'_n , $n = 1, 2, \dots, N$. У претходном изразу, са G_{mn} означена је Гринова функција одређена применом теорије логаритамских потенцијала, коју је могуће применити када је број употребљених ЕЕ велики, а највећа ширина тракастих проводника веома мала,

$$G_{mn} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|}{\sqrt{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|^2 + a_{em}^2 \delta_{mn}}}. \quad (4.6)$$

где је δ_{mn} Кронекеров симбол.

Након одређивања оптерећења ЕЕ, могуће је прорачунати и остале величине од интереса. Тако је на основу израза за потенцијал (4.3), вектор електричног поља у околини посматране електроде,

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4.7)$$

Одређивање вектора електричног поља применом претходног израза (када је потенцијал дат изразом (4.3)), на површини електроде доводи до велике грешке. Зато се у тачкама на површини електроде интензитет електричног поља одређује из граничног услова за нормалну компоненту електричног поља на површини проводника

$$E_n = \frac{\eta_n}{\epsilon}, \quad (4.8)$$

где је $\eta_n = q'_n/l_n$ површинска густина наелектрисања на n -тој тракастој електроди, смештеној између тачака A_n и A_{n+1} , $n = 1, 2, \dots, N$.

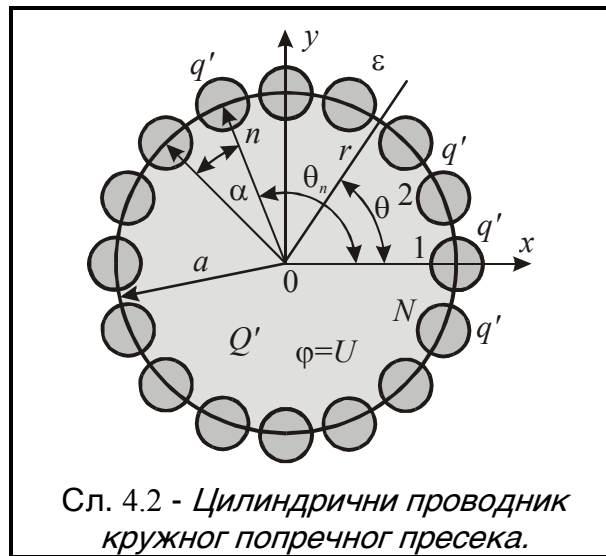
4.1.2. Примери примене метода еквивалентне електроде

У складу са предметом истраживања овог рада, описана је примена МЕЕ на решавање проблема усамљеног цилиндричног проводника неограничене дужине кружног попречног пресека, као и на анализу цилиндричног кондензатора [4.8].

4.1.2.1 Усамљени цилиндрични проводник неограничене дужине кружног попречног пресека

Посматра се усамљени цилиндрични проводник неограничене дужине, кружног попречног пресека полупречника a , оптерећен подужним наелектрисањем Q' и на потенцијалу U (Сл. 4.2) [4.8]. Проводник је обзиром на присутну симетрију, замењен системом од N равномерно распоређених ЕЕ, истог еквивалентног полупречника a_e и једнаког подужног оптерећења q' . Како је сума наелектрисања ЕЕ једнака укупном оптерећењу електроде Q' , то је

$$q' = Q'/N. \quad (4.9)$$



Еквивалентни полупречник ЕЕ a_e одговара угаоном отвору $\alpha = 2\pi/N$, па је

$$a_e = a \sin(\alpha/4) = a \sin(\pi/2N). \quad (4.10)$$

Када се електродни систем са Сл. 2 посматра у цилиндричном координатном систему, са координатама r и θ ($x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$), при чему оса електроде лежи на правцу $r = 0$, док су осе ЕЕ смештене на правцима $r = a$, $\theta_n = (n-1)\alpha$, $n = 1, 2, \dots, N$, потенцијал у околини формираног електродног система може се одредити на основу израза

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{Q'}{2\pi\epsilon N} \ln \prod_{n=1}^N \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \theta_n)}, \quad (4.11)$$

односно,

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{Q'}{2\pi\epsilon N} \ln \sqrt{r^{2N} + a^{2N} - 2a^N r^N \cos(N\theta)}. \quad (4.12)$$

У претходним изразима ε је диелектрична константа средине у којој се проводник налази, док је φ_0 адитивна константа. Потенцијал на површини усамљене цилиндричне електроде са Сл. 4.2 је

$$U = \varphi_0 - \frac{Q'}{2\pi\varepsilon} \ln a, \quad (4.13)$$

док је потенцијал на површини кавезастих електродног система формираног од ЕЕ,

$$U = \varphi_0 - \frac{Q'}{2\pi\varepsilon N} \ln A_e, \quad (4.14)$$

где је A_e еквивалентни полупречник система еквивалентних електрода [4.8],

$$A_e = a \sqrt[N]{N \sin \frac{\pi}{2N}}. \quad (4.15)$$

Таблица 4.1

N	A_e/a
1	1.000 000 000 000 000
2	1.189 207 115 002 721
3	1.144 714 242 553 332
4	1.112 307 621 429 733
5	1.090 913 895 690 523
10	1.045 762 932 781 543
50	1.009 069 242 738 553
100	1.004 525 625 667 449
1000	1.000 451 684 272 690
10 000	1.000 045 159 289 768
100 000	1.000 004 515 837 249
1 000 000	1.000 000 451 582 807
10 000 000	1.000 000 045 158 272
100 000 000	1.000 000 004 515 827
1 000 000 000	1.000 000 000 451 583
∞	1.000 000 000 000 000

На основу претходног, може се очекивати да се са повећањем броја ЕЕ, вредност еквивалентног полупречника A_e приближава полупречнику цилиндричне електроде a , као и да је у граничном случају $\lim_{N \rightarrow \infty} A_e = a$. Ово потврђују и вредности из Таблице 4.1, у којој је приказан однос A_e/a , одређен помоћу израза (4.15), за различит број ЕЕ [4.8].

Комбинацијом израза (4.12), (4.14) и (4.15) добија се израз за потенцијал у околини система ЕЕ

$$\varphi = U - \frac{Q'}{2\pi\varepsilon N} \ln \frac{\sqrt[N]{r^{2N} + a^{2N}} - 2a^N r^N \cos(N\theta)}{A_e}. \quad (4.16)$$

Како је $E = -\text{grad} \varphi$, на основу (4.16), за радијалну (E_r) и угаону компоненту (E_θ) електричног поља добија се,

$$E_r = E \frac{1 - (a/r)^N \cos(N\theta)}{1 + (a/r)^{2N} - 2(a/r)^N \cos(N\theta)} \text{ и } E_\theta = E \frac{(a/r)^N \sin(N\theta)}{1 + (a/r)^{2N} - 2(a/r)^N \cos(N\theta)}, \quad (4.17)$$

где је

$$E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}. \quad (4.18)$$

Електрично поље у околини усамљеног цилиндричног проводника има само радијалну компоненту,

$$\mathbf{E} = E\hat{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \hat{r}, \quad (4.19)$$

па су тачне вредности радијалне и нормалне компоненте електричног поља у околини усамљене цилиндричне електроде,

$$E_r = E \text{ и } E_\theta = 0. \quad (4.20)$$

Из израза (4.17) и (4.18) је очигледно да је за $r > a$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_r = E \text{ и } \lim_{N \rightarrow \infty} E_\theta = 0, \quad (4.21)$$

па се може константовати да у граничном случају ($N \rightarrow \infty$), МЕЕ даје тачну вредност за вектор електричног поља у околини усамљеног цилиндричног проводника.

4.1.2.2 Цилиндрични кондензатор

Већ је речено да је у случајевима када се посматрани систем састоји од више електрода или ако је систем смештен у слојевитој средини, приликом примене МЕЕ погодно користити Гринове функције за поједине електроде, односно слојевите средине, а остале електроде електродног система заменити ЕЕ. Овај поступак биће објашњен на примеру цилиндричног кондензатора приказаном на Сл. 4.3 [4.8].

Тачни изрази за потенцијал и вектор електричног поља у међуелектродном простору цилиндричног кондензатора су

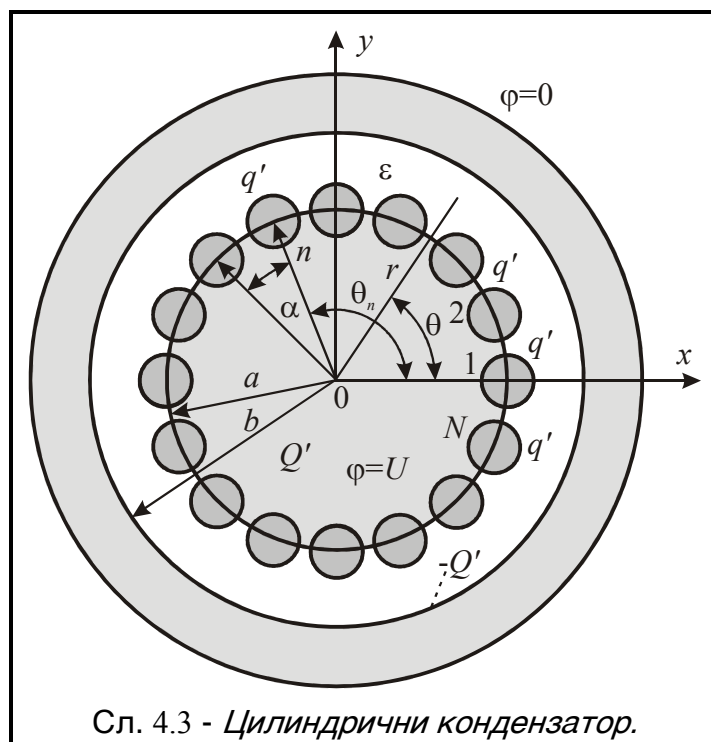
$$\varphi = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \frac{\ln(b/r)}{\ln(a)}, \quad (4.22)$$

односно,

$$\mathbf{E} = E\hat{r}, \quad E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} = \frac{U}{r \ln(b/a)}. \quad (4.23)$$

У изразима (4.22) и (4.23), a и b су полупречници унутрашње (a) и спољашње електроде (b) ($a < b$). Подужно наелектрисање кондензатора означено је са Q' , U је напон између електрода, ϵ је диелектрична константа диелектрика, док је r радијална координата цилиндричног координатног система.

Када се на овакав електродни систем примењује МЕЕ, довољно је помоћу ЕЕ (цилиндрични проводници кружног попречног пресека) заменити само унутрашњу электроду кондензатора, док се утицај спољашње електроде одређује помоћу теореме лика и Гринове функције за подужно наелектрисање у цилиндричној проводној шупљини кружног попречног пресека.



Сл. 4.3 - Цилиндрични кондензатор.

Потенцијал електродног система формираног на овај начин је

$$\varphi = \frac{q'}{4\pi\epsilon} \ln \frac{b^{2N} - 2(ar)^N \cos(N\theta) + (ar/b)^{2N}}{a^{2N} - 2(ar)^N \cos(N\theta) + r^{2N}}, \quad a < r < b, \quad (4.24)$$

где су r и θ цилиндричне координате, док је N број ЕЕ, оптерећених подужним наелектрисањем $q' = Q'/N$ и равномерно распоређених на површини унутрашње електроде у тачкама $r = a$, $\theta = \theta_n = (n-1)2\pi/N$, $n = 1, 2, \dots, N$. Како је угаоно растојање између оса две суседне еквивалентне електроде $\alpha = 2\pi/N$, полупречник ЕЕ је $a_e = a \sin(\pi/2N)$. Када се у израз (4.24) стави да је $\theta = 0$ и $r = a + a_e$ и има у виду да је за довољно велики број ЕЕ $a_e \ll a$, потенцијал унутрашњег проводника је

$$U = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b^{2N} - a^{2N}}{Na_e a^{N-1} b^N}. \quad (4.25)$$

На основу (4.25), приближан израз за подужну капацитивност има облик.

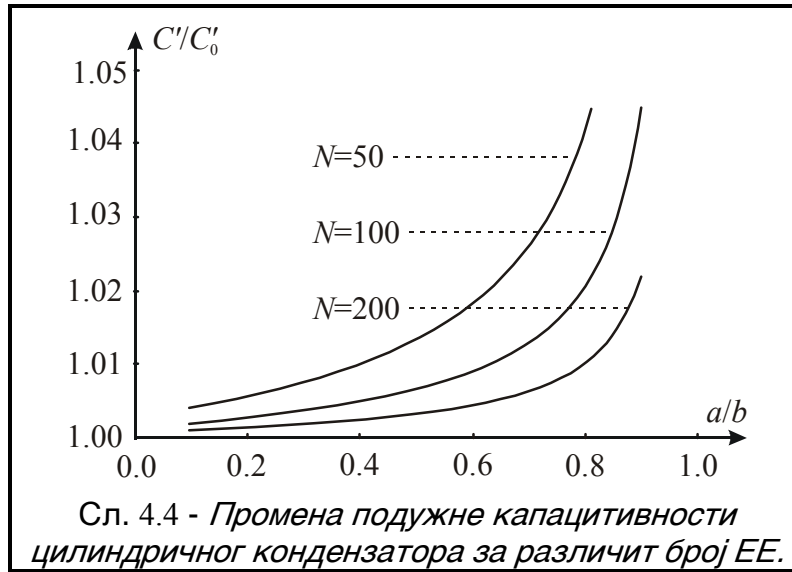
$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon N}{\ln \frac{b^{2N} - a^{2N}}{Na_e a^{N-1} b^N}} = \frac{2\pi\epsilon N}{\ln \frac{b^{2N} - a^{2N}}{Na^N b^N \sin(\pi/2N)}}. \quad (4.26)$$

Како је тачан израз за подужну капацитивност кондензатора

$$C'_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}, \quad (4.27)$$

добија се,

$$C' = C'_0 \frac{\ln(b/a)}{\ln(b/a) + \frac{1}{a} \ln \frac{1-(a/b)^{2N}}{N \sin(\pi/2N)}}. \quad (4.28)$$



На Сл. 4.4 приказана је зависност нормализоване подужне капацитивности C'/C'_0 од односа a/b , за различит број ЕЕ, N . Са графика се уочава се да се одступање приближне од тачне вредности капацитивности смањује са повећањем броја ЕЕ, што се и могло очекивати. Са порастом односа a/b , грешка начињена одређивањем подужне капацитивности применом израза (4.28) расте.

Комбинацијом израза за потенцијал (4.24) и израза (4.7), за радијалну (E_r) и угаону компоненту (E_θ) електричног поља добија се

$$E_r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \left[\frac{1 - (a/r)^N \cos(N\theta)}{1 - 2(a/r)^N \cos(N\theta) + (a/r)^{2N}} - \frac{(ar/b^2)^{2N} - (ar/b^2)^N \cos(N\theta)}{1 - 2(ar/b^2)^N \cos(N\theta) + (ar/b^2)^{2N}} \right], \text{ и} \quad (4.29)$$

$$E_\theta = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \sin(N\theta) \left[\frac{1}{(a/r)^N - 2 \cos(N\theta) + (r/a)^{2N}} - \frac{1}{(b^2/ar)^N - 2 \cos(N\theta) + (ar/b^2)^N} \right]. \quad (4.30)$$

Претходно наведени изрази највећу тачност имају на површини спољашње електроде ($r = b$), на којој је

$$E_r(r = b, \theta) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \left[\frac{1 - (a/b)^N}{1 - 2(a/b)^N \cos(N\theta) + (a/b)^{2N}} \right] \text{ и } E_\theta(r = b, \theta) = 0. \quad (4.31)$$

Може се закључити да се вредност радијалне компоненте на површини спољашње електроде креће у интервалу

$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \frac{1 - (a/b)^N}{1 + (a/b)^N} \leq E_r(r = b, \theta) \leq \frac{Q'}{2\pi\epsilon r} \frac{1 + (a/b)^N}{1 - (a/b)^N}. \quad (4.32)$$

Из израза (4.29) очигледно је да се применом метода еквивалентне електроде, у граничном случају ($N \rightarrow \infty$) за радијалну компоненту електричног поља добија тачна вредност,

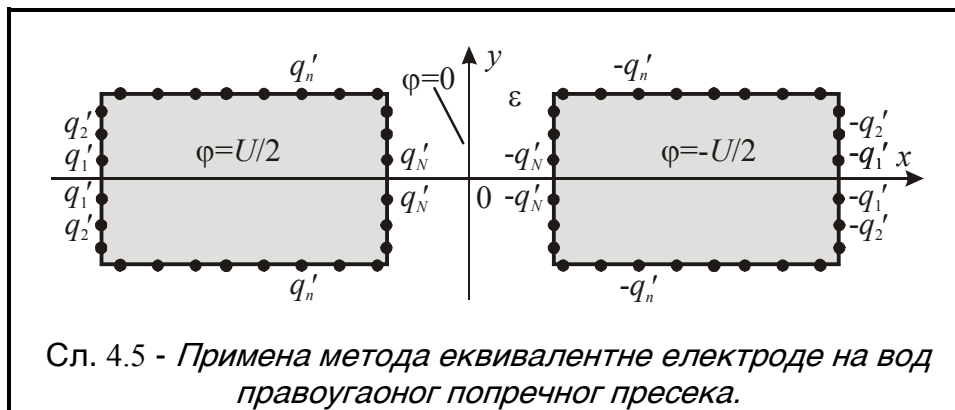
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_r = \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}. \quad (4.33)$$

4.2. Примена метода еквивалентне електроде на решавање водова полигоналног попречног пресека проводника

У претходном тексту у неколико наврата је наглашено да је у случајевима када се метод еквивалентне електроде примењује на електродне системе формиране од већег броја електрода или смештене у слојевитом диелектрику, често погодније користити Грине функције за поједине електроде, односно слојевите средине, а остале електроде електродног система заменити ЕЕ. Наравно, то је могуће учинити само у случајевима када одговарајуће Грине функције егзистирају у облику који дозвољава њихово одређивање са захтеваном тачношћу.

У случајевима водова полигоналног попречног пресека проводника, напред наведени услови веома су често испуњени, што примену МЕЕ, уз његове раније поменуте предности, чини веома захвалним начином за њихово решавање. Тако је помоћу овог метода могуће решавати вишежичне водове полигоналног попречног пресека изнад проводне равни [4.11, 4.13], оклопљене [4.12, 4.14, 4.16], као и прорезане [4.15] вишежичне водове полигоналног попречног пресека проводника. Примена МЕЕ на водове омогућава одређивање потенцијала, капацитивности, вектора електричног поља, подужне отпорности и других величина од интереса [4.8, 4.9]. При томе су ЕЕ цилиндрични проводници кружног попречног пресека, еквивалентног полупречника $a_e = l/4$, где је l ширина тракастог дела површине електроде који ЕЕ замењује. У даљем тексту ове чињенице неће бити посебно наглашаване.

Илустрације ради, МЕЕ биће примењен на вод правоугаоног попречног пресека са Сл. 2.7, који је у одељку 3.3.2.1 решен Ламеовим методом.



Како се ЕЕ су равномерно распоређују по површини проводника, због присутне симетрије, довољно је одредити наелектрисања ЕЕ смештених на горњој површини левог проводника, q'_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Потенцијал овако формираног електродног система је

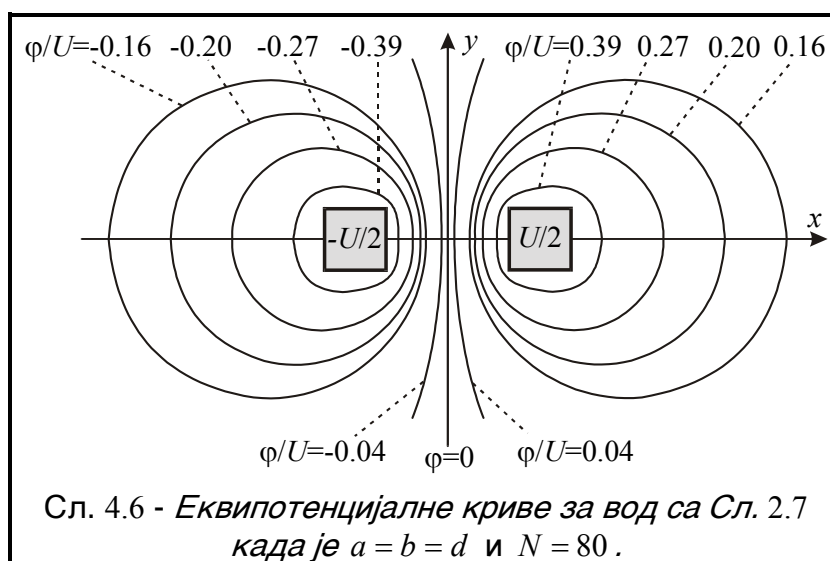
$$\varphi = \sum_{n=1}^N \frac{q'_n}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}{(x+x_n)^2 + (y+y_n)^2} \frac{(x-x_n)^2 + (y+y_n)^2}{(x+x_n)^2 + (y-y_n)^2}}, \quad (4.34)$$

где су x_n и y_n , $n = 1, 2, \dots, N$, координате тачака у којима су смештене осе ЕЕ (у даљем тексту, координате ЕЕ), док је са ε обележена диелектрична константа средине у којој се проводници налазе.

Из услова да је потенцијал на површини електроде $\varphi = U/2$, формира се систем једначина

$$U = \sum_{n=1}^N \frac{q'_n}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt{\frac{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}{(x_m + x_n)^2 + (y_m + y_n)^2} \frac{(x_m - x_n)^2 + (y_m + y_n)^2}{(x_m + x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + a_{em}\delta_{mn}}}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (4.35)$$

где је δ_{mn} Кронекерова делта. При томе је, како је то већ раније речено, искоришћена теорија логаритамских потенцијала.



Након решавања система једначина (4.35), и одређивања наелектрисања ЕЕ, q'_n , $n = 1, 2, \dots, N$, могу се, на већ описани начин, одредити и остале величине од интереса. Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 2.7, одређене применом МЕЕ за $a = b = d$ и $N = 80$, приказане су на Сл. 4.6.

Подужна капацитивност вода одређује се на основу израза

$$C' = \frac{2 \sum_{n=1}^N q'_n}{U}. \quad (4.36)$$

Таблица 4.2

МЕЕ		Поступак описан у 2.3	
Број ЕЕ	$C'/2\pi\varepsilon$	Број фактора у (2.26)	$C'/2\pi\varepsilon$
$N = 20$	0.3168	$N = 2$	0.330
$N = 40$	0.3162	$N = 3$	0.321
$N = 60$	0.3159	$N = 4$	0.318
$N = 80$	0.3157	$N = 5$	0.317

У Таблици 4.2 налазе се нормализоване вредности подужних капацитивности вода са Сл. 3.7 одређене применом МЕЕ за различит број ЕЕ. Поређења ради, приказане су и вредности подужних капацитивности одређене поступком описаним у одељку 3.3, за различит број фактора у развоју (3.26). При томе је $a = b = d$.

Може се уочити да је применом поступка апроксимације еквипотенцијала, са релативно малим бројем фактора у производу (3.26) постигнута прихватљива тачност. Слагање резултата би свакако било уочљивије да је број фактора у примењеној апроксимацији (3.26) већи.

Параметри вода са Сл. 3.7 могу се одредити и техником конформних пресликавања, при чему се користи комбинација следећих облика Шварц-Кристофелове трансформације [4.5a],

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \left[\frac{(t^2 - \xi_1^2)(t^2 - \xi_2^2)}{(t^2 - 1)(t^2 - k^{-2})} \right]^{1/2} \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dt} = C_2 [(t^2 - 1)(t^2 - k^{-2})]^{-1/2}, \quad (4.37)$$

где су C_1 и C_2 комплексне константе. Параметри ξ_1 , ξ_2 и k у изразу (4.37) одређују се на основу услова

$$\frac{a}{d} = \frac{I(\xi_1, \xi_2)}{I(0,1)}, \quad \frac{b}{2d} = \frac{I(1, \xi_1)}{I(0,1)} \quad \text{и} \quad 1 = \frac{I(1, \xi_1)}{I(\xi_2, k^{-1})}, \quad \text{где је} \quad (4.38)$$

$$I(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{(t^2 - \xi_1^2)(t^2 - \xi_2^2)}{(t^2 - 1)(t^2 - k^{-2})} \right]^{1/2} dt. \quad (4.39)$$

За подужну капацитивност вода са Сл. 3.7 применом описаног конформног пресликавања добија се

$$C' = \varepsilon K(k')/K(k), \quad (4.40)$$

док је карактеристична импеданса вода,

$$Z_C = \sqrt{\mu\varepsilon}/C' = 120\pi\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r} K(k)/K(k'), \quad (4.41)$$

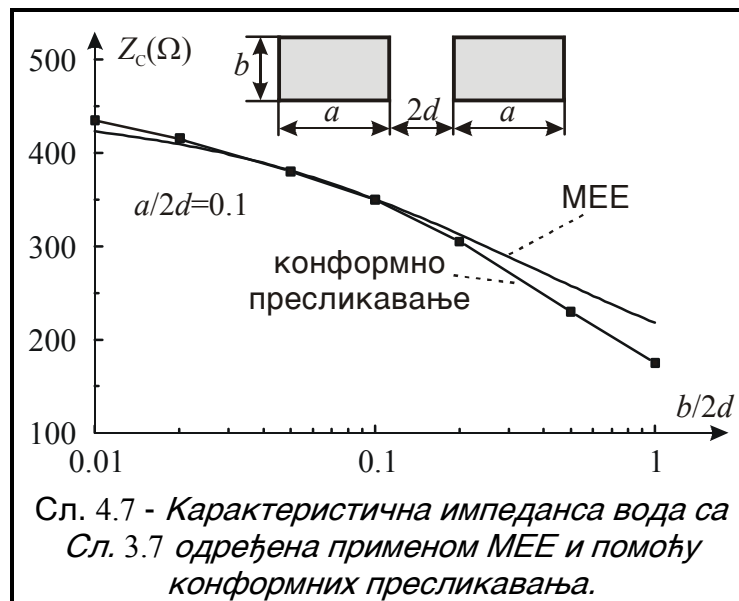
где је $K(k)$ потпуни елиптички интеграл прве врсте модула k ,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} [1 - (k \sin \theta)^2]^{-1/2} d\theta, \quad (4.42)$$

док је $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Модуо k одређује из услова задатих изразом (4.38). У изразима (4.40) и (4.41), са ε , ε_r , μ и μ_r респективно су означене апсолутна диелектрична константа, релативна диелектрична константа, апсолутна и релативна магнетна пропустљивост средине у којој је вод смештен.

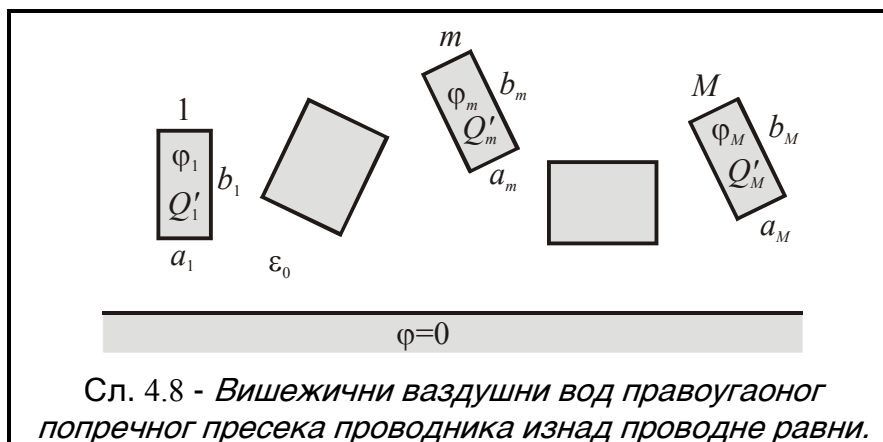
На Сл. 4.7 представљене су функције промене карактеристичне импедансе вода са Сл. 3.7 са односом $b/2d$, одређене помоћу описаног конформног пресликавања и применом МЕЕ, за еквивалентни систем од $N = 80$ ЕЕ. При томе је $a/2d = 0.1$, а средина у воду је ваздух. Одступање које се јавља у области у којој однос $b/2d$ има малу вредност може се објаснити тиме да су електроде танке у односу на међусобно растојање, па би се применом тракастих уместо цилиндричних ЕЕ остварило боље слагање. Са друге стране, одступање у делу графика у коме је

однос $b/2d$ већи могло би се ублажити повећањем броја ЕЕ којима се замењује посматрани електродни систем.



4.2.1. Водови правоугаоног попречног пресека проводника изнад проводне равни

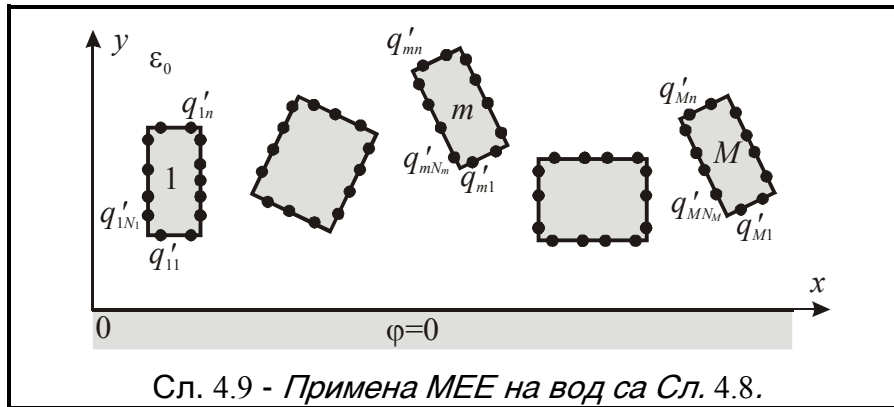
Посматра се вишежични ваздушни вод правоугаоног попречног пресека проводника смештен изнад проводне равни нултог потенцијала, приказан на Сл. 4.8 [4.11, 4.13].



Подужна оптерећења електрода и њихове потенцијале, повезује систем линеарних релација,

$$\begin{aligned}
 Q_1' &= C_{11}'\varphi_1 + C_{12}'(\varphi_1 - \varphi_2) + \dots + C_{1m}'(\varphi_1 - \varphi_m) + \dots + C_{1M}'(\varphi_1 - \varphi_M) \\
 Q_2' &= C_{21}'(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}'\varphi_2 + \dots + C_{2m}'(\varphi_2 - \varphi_m) + \dots + C_{2M}'(\varphi_2 - \varphi_M) \\
 \dots & \\
 Q_m' &= C_{m1}'(\varphi_m - \varphi_1) + C_{m2}'(\varphi_m - \varphi_2) + \dots + C_{mm}'\varphi_m + \dots + C_{mM}'(\varphi_m - \varphi_M) \\
 \dots & \\
 Q_M' &= C_{M1}'(\varphi_M - \varphi_1) + C_{M2}'(\varphi_M - \varphi_2) + \dots + C_{Mm}'(\varphi_M - \varphi_m) + \dots + C_{MM}'\varphi_M,
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

где су C'_{mn} , $m, n = 1, 2, \dots, M$ подужне парцијалне капацитивности посматраног електродног система ($C'_{mn} = C'_{nm}$, $m \neq n$).



Сл. 4.9 - Примена МЕЕ на вод са Сл. 4.8.

Како се ради о планпаралелном електродном систему, електроде се замењују системом цилиндричних ЕЕ, униформно распоређених по површини проводника (Сл. 4.9). При томе је оптерећење поједине електроде једнако алгебарској суми наелектрисања ЕЕ којима је посматрана електрода замењена, односно

$$Q'_m = \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4.44)$$

У претходном изразу, са q'_{mn} , $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ означена су наелектрисања ЕЕ.

Израз за потенцијал овако формираног електродног система, добијен применом теореме lika у равном огледалу има облик,

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} \ln \frac{(x - x_{mn})^2 + (y + y_{mn})^2}{(x - x_{mn})^2 + (y - y_{mn})^2}. \quad (4.45)$$

где су x_{mn} и y_{mn} , $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ координате тачака у којима су смештене осе одговарајућих ЕЕ.

Непозната наелектрисања ЕЕ одређују се из система линеарних једначина формираног на основу граничног услова за потенцијал на површини електроде, на начин описан у одељку 4.1.1. У конкретном случају, уз примену раније поменуте теорије логаритамских потенцијала, систем једначина има облик,

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} \ln \frac{(x_{ij} - x_{mn})^2 + (y_{ij} + y_{mn})^2}{(x_{ij} - x_{mn})^2 + (y_{ij} - y_{mn})^2 + a_{emn}^2 \delta_{im} \delta_{jn}}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N_i. \quad (4.46)$$

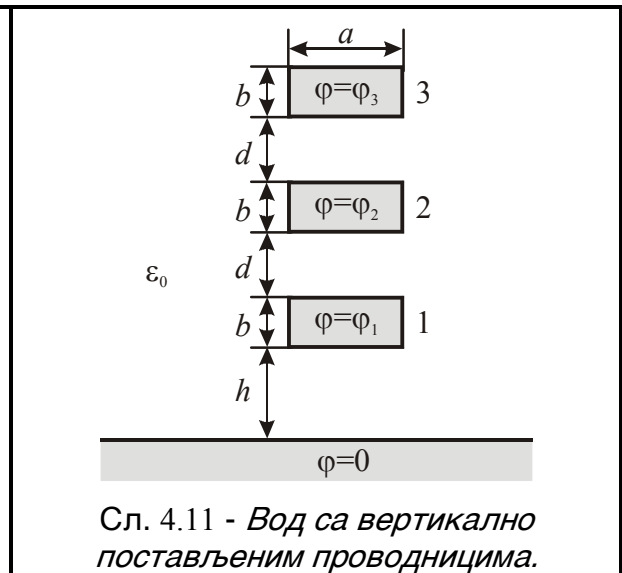
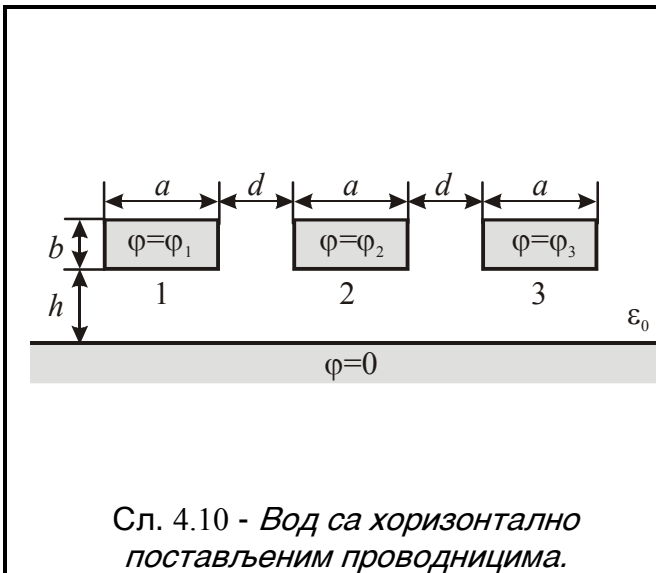
У изразу (4.46), са φ_{ij} обележен је потенцијал на површини j -те ЕЕ, смештене на површини i -те електроде електродног система. Еквивалентни полупречник ЕЕ означен је са a_{emn} , док је, слично као у изразу (4.6), δ_{mn} Кронекерова делта.

Након одређивања наелектрисања ЕЕ, остале величине од интереса (потенцијал, јачина електричног поља у околини електрода и на њиховој површини, делимичне капацитивности) одређују се применом процедуре претходно објашњене у одељку 4.1.1.

4.2.1.1 Нумерички резултати

На основу процедуре објашњене у одељку 4.2.1, развијен је програм за прорачун водова полигоналног попречног пресека изнад проводне равни. Анализирани су тројични водови правоугаоног попречног пресека проводника, смештени хоризонтално (Сл. 4.10) и вертикално (Сл. 4.11), изнад проводне равни. У оба случаја је претпостављено је да су напони проводника фазно померени за $2\pi/3$, односно да је њихова тренутна вредност,

$$\varphi_1 = U \cos(\omega t), \quad \varphi_2 = U \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{и} \quad \varphi_3 = U \cos(\omega t + 2\pi/3), \quad (4.47)$$



У Таблици 4.3 приказане су нормализоване вредности парцијалних подужних капацитивности вода са хоризонтално постављеним електродама, одређене помоћу МЕЕ, при чему је $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$, док је број употребљених ЕЕ различит.

Нормализоване вредности парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.11 одређене применом МЕЕ за различит број ЕЕ када је $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$ приказане су у Таблици 4.4.

Таблица 4.3

Број ЕЕ	$C'_{11}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{12}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{13}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{22}/2\pi\epsilon_0$
$N_1 = N_2 = N_3 = 20$	0.4330	0.2269	0.02098	0.3213
$N_1 = N_2 = N_3 = 40$	0.4314	0.2258	0.02096	0.3202
$N_1 = N_2 = N_3 = 60$	0.4308	0.2252	0.02095	0.3197

Таблица 4.4

Број ЕЕ	$C'_{11}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{12}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{13}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{22}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{23}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{33}/2\pi\epsilon_0$
$N_1 = N_2 = N_3 = 20$	0.434	0.3339	0.03136	0.13251	0.364	0.1889
$N_1 = N_2 = N_3 = 40$	0.433	0.3299	0.03125	0.13248	0.359	0.1887
$N_1 = N_2 = N_3 = 60$	0.432	0.3283	0.03123	0.13250	0.358	0.1886

Промена нормализованих парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.10 у функцији односа h/b , када је $a/b = 2$ и $d/b = 1.5$ приказана је на Сл. 4.12. За

исти вод одређена је и зависност нормализованих парцијалних подужних капацитивности од односа d/b , при чему је $a/b = h/b = 2$ (Сл. 4.13).

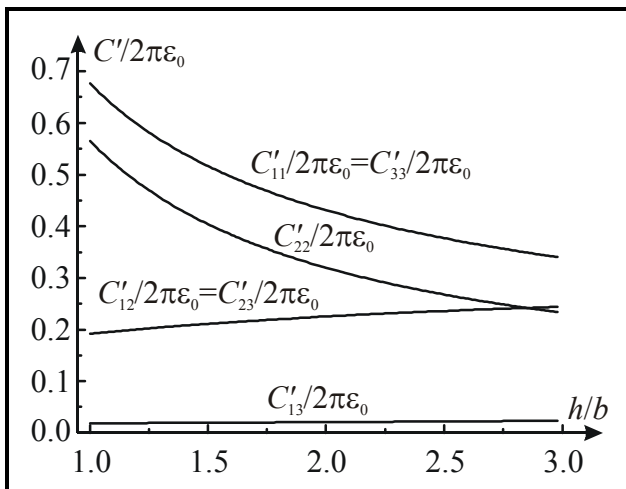
Зависност нормализованих вредности парцијалних капацитивности вода са Сл. 4.11 од односа h/b , када је $a/b = 2$ и $d/b = 1.5$ приказана је на Сл. 4.14a-b. Промена нормализованих парцијалних капацитивности одређена је и у функцији односа d/b , при чему је $a/b = h/b = 2$ (Сл. 4.15a-b). Линеје електричног поља одређене применом МЕЕ за $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$ у тренутку $\omega t = \pi/6$, приказане су на Сл. 4.16.

Изглед еквипотенцијалних кривих одређених помоћу МЕЕ у околини проводника вода са Сл. 4.10 за различите вредности ωt вредности приказан је на Сл. 4.17a-d. При томе је $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$. Еквиенергетске криве (геометријса места константне запреминске густине енергије електростатичког поља) одређене за исте вредности параметара у тренутку $\omega t = 0$ приказане су на Сл. 4.18, док Сл. 4.19 представља облик линија електричног поља за $\omega t = \pi/4$.

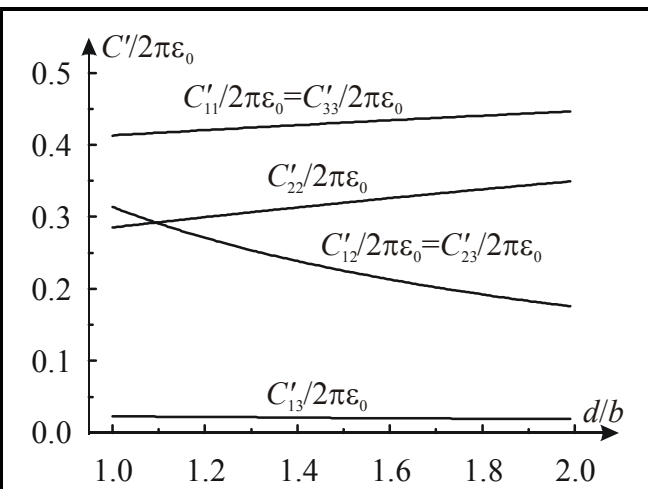
На Сл. 4.20a-d представљене су еквипотенцијалне криве у околини проводника вода са Сл. 4.11 одређене применом МЕЕ за различите вредности ωt . При томе је $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$.

Нормализована вредност јачине електричног поља на површини електрода вода са Сл. 4.10 и Сл. 4.11 у тренутку $\omega t = 0$, приказана је на Сл. 4.21a-c (за хоризонтално распоређене проводнике) и Сл. 4.22a-c (за вертикално распоређене проводнике). При томе је, у оба случаја, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$.

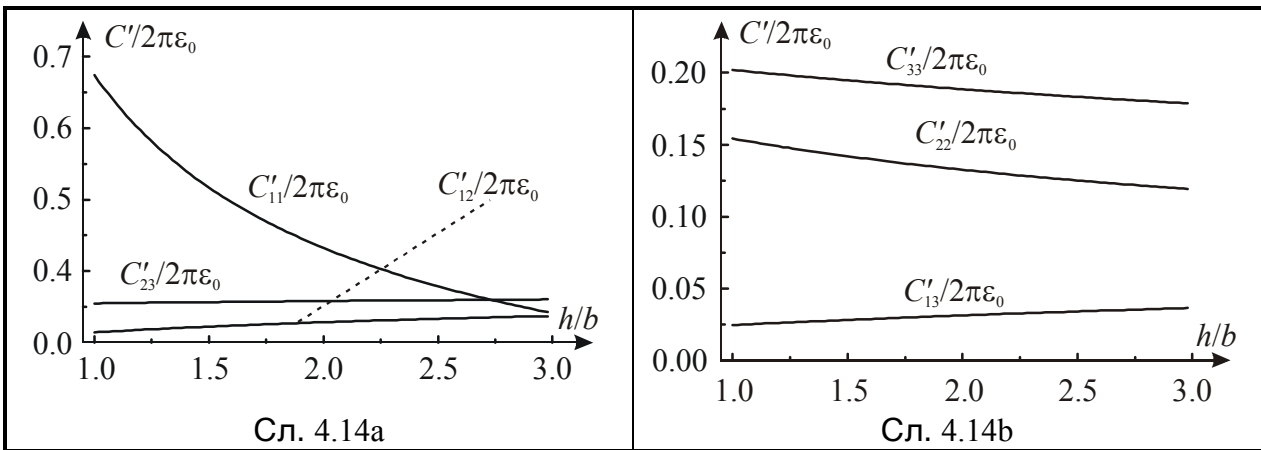
Еквиенергетске криве у околини вода са Сл. 4.11 за $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 1.5$ у тренутку $\omega t = 0$, приказане су на Сл. 4.23.



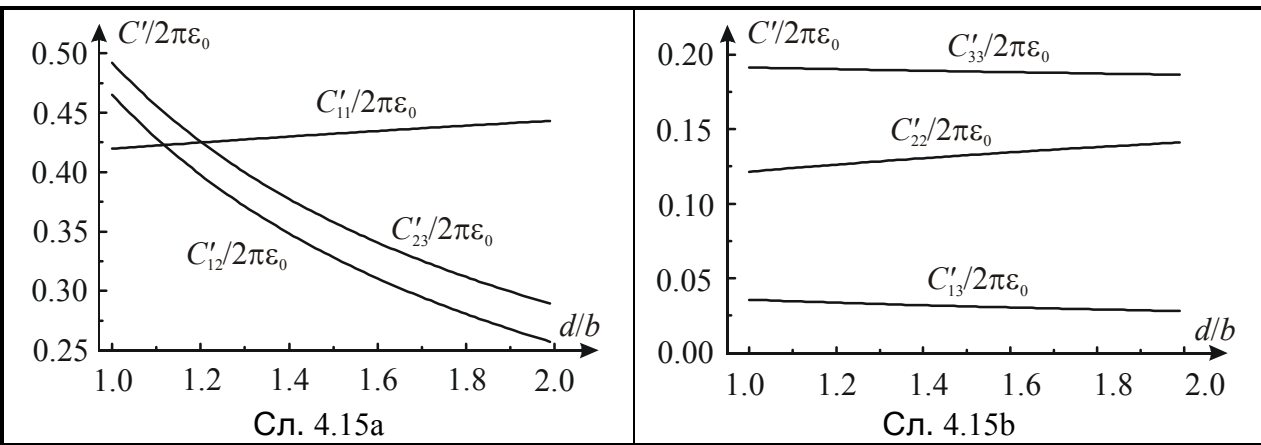
Сл. 4.12 - Промена парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.10 у функцији односа h/b , када је $a/b = 2$, $d/b = 1.5$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$.



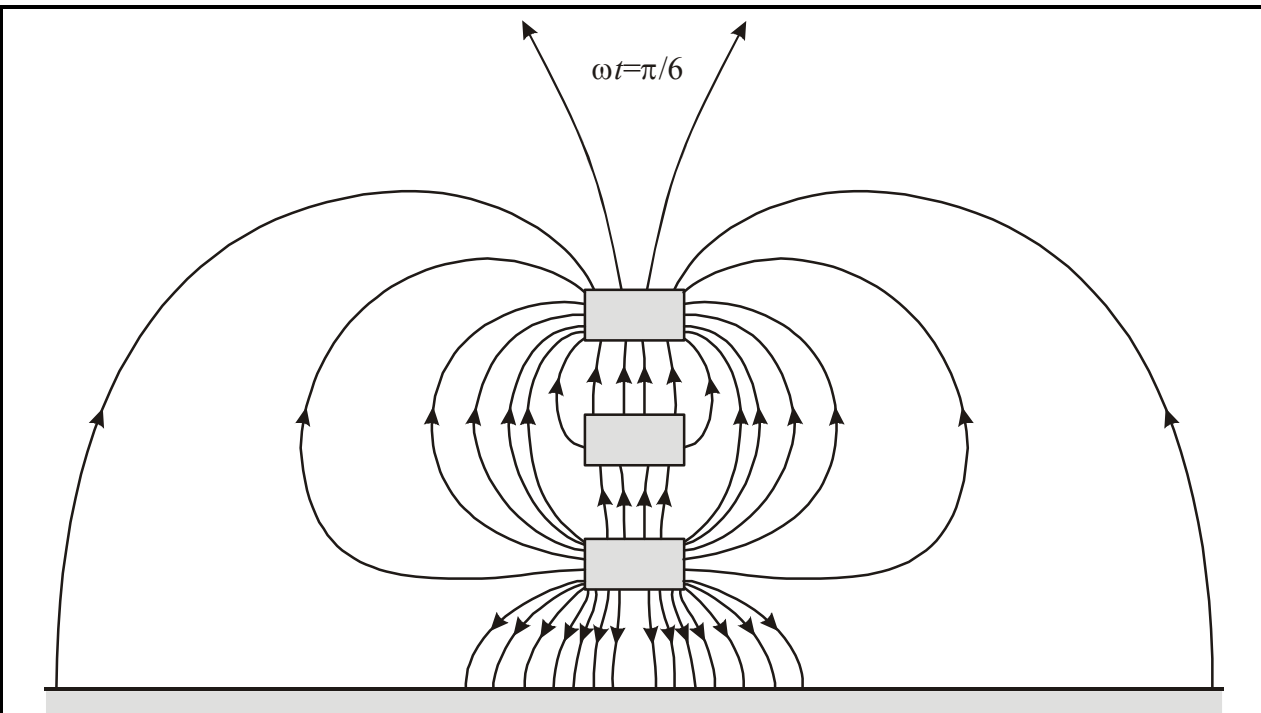
Сл. 4.13 - Промена парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.10 у функцији односа d/b , када је $a/b = h/b = 2$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$.



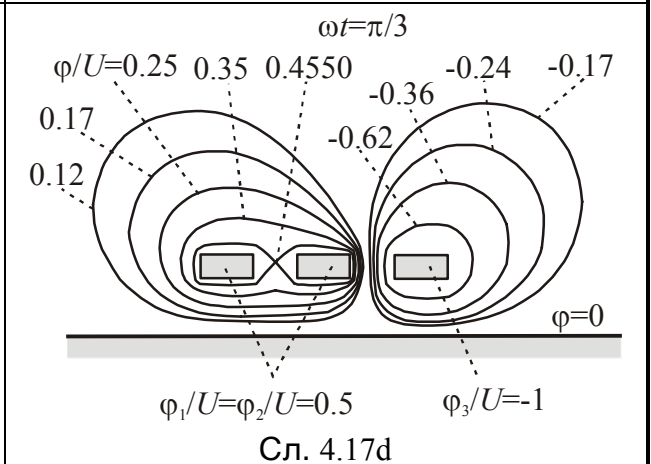
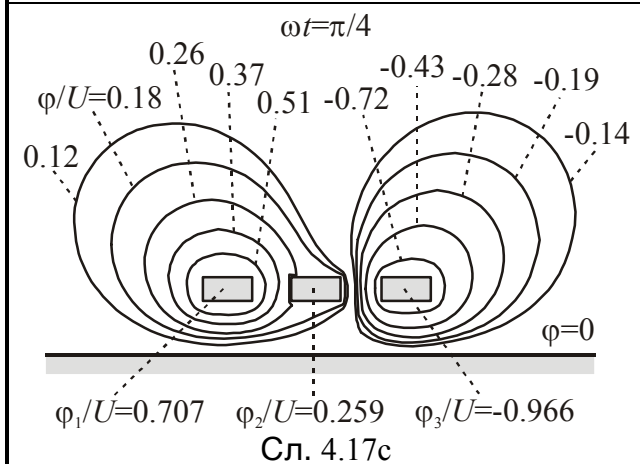
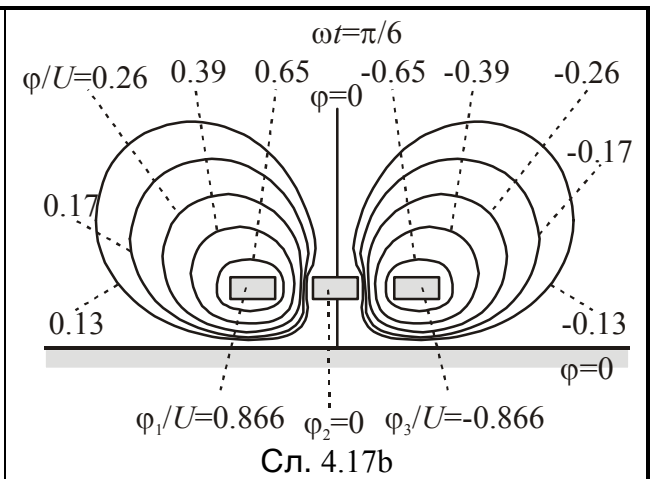
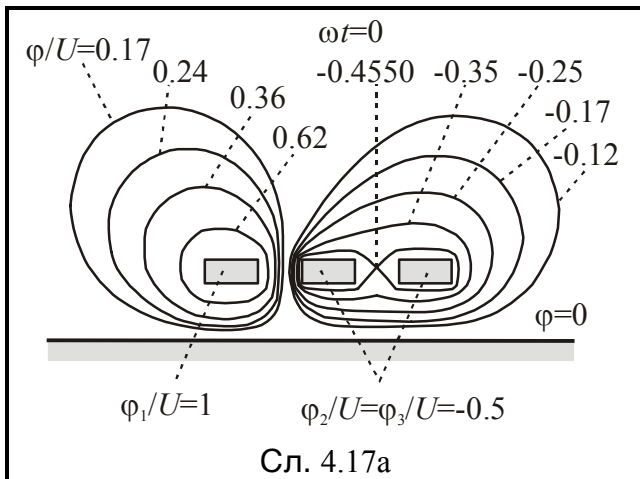
Сл. 4.14 - Промена парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.11 у функцији односа h/b , када је $a/b = 2$, $d/b = 1.5$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$.



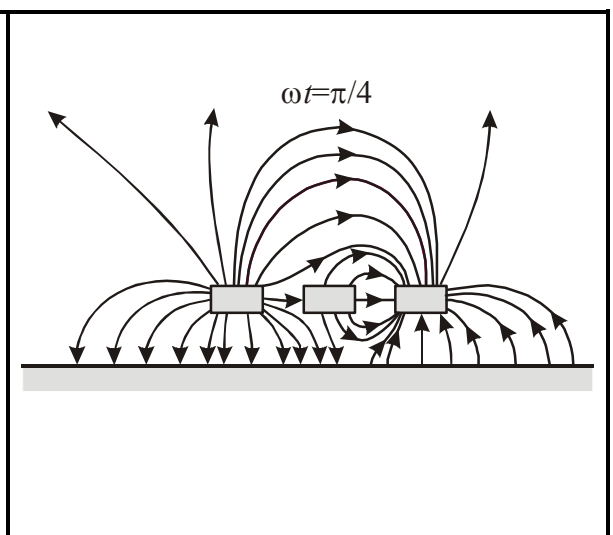
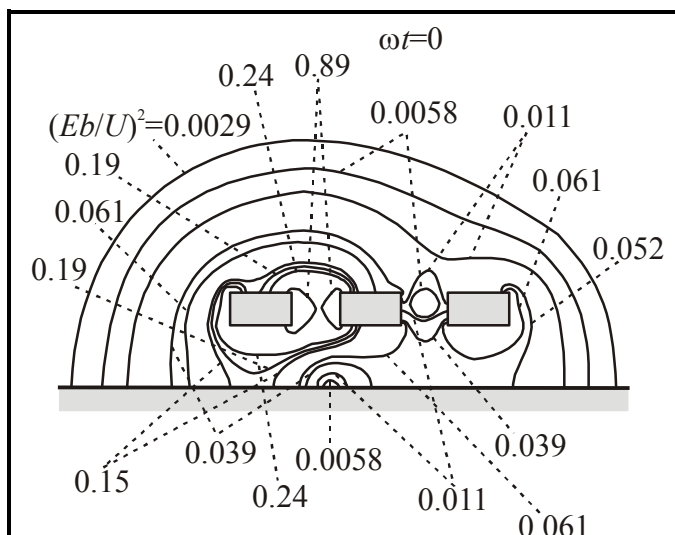
Сл. 4.15 - Промена парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.11 у функцији односа d/b , када је $a/b = h/b = 2$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$.

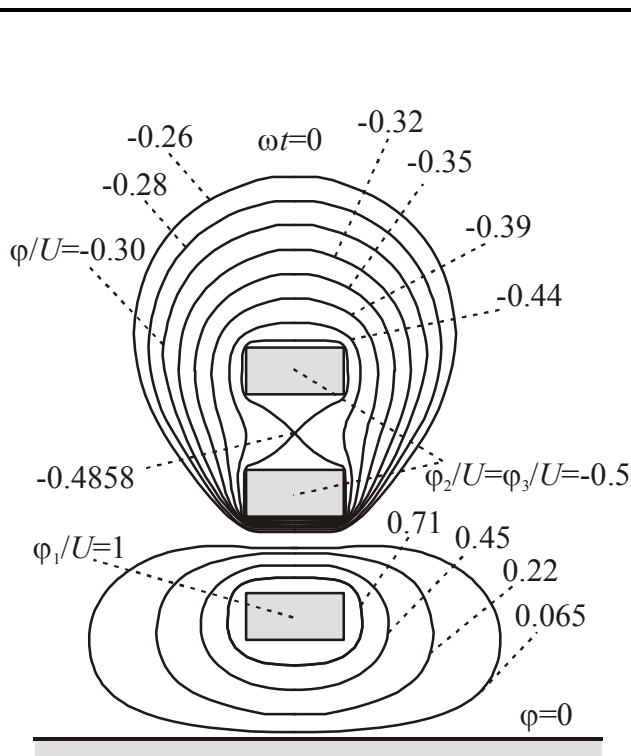


Сл. 4.16 - Линије електричног поља за вод са Сл. 4.11 када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$, $N_1 = N_2 = N_3 = 60$ и $\omega t = \pi/6$.

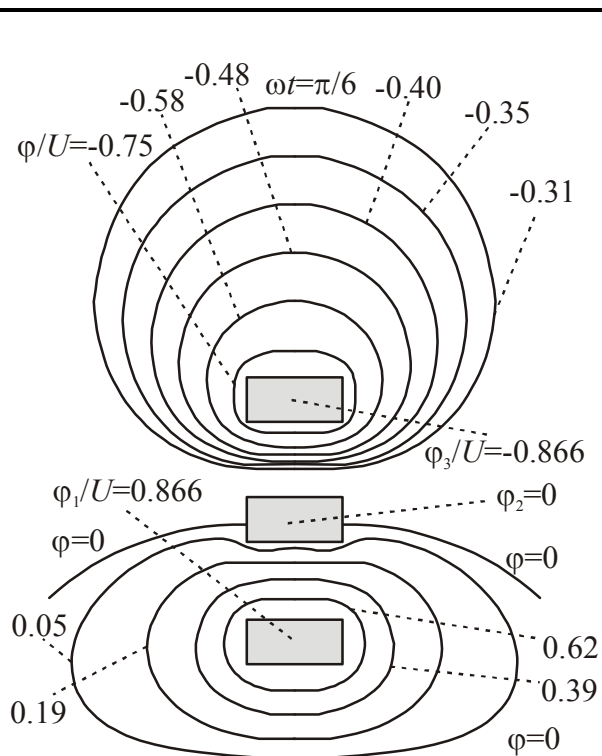


Сл. 4.17 - Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 4.10 када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$, за различите вредности ωt .

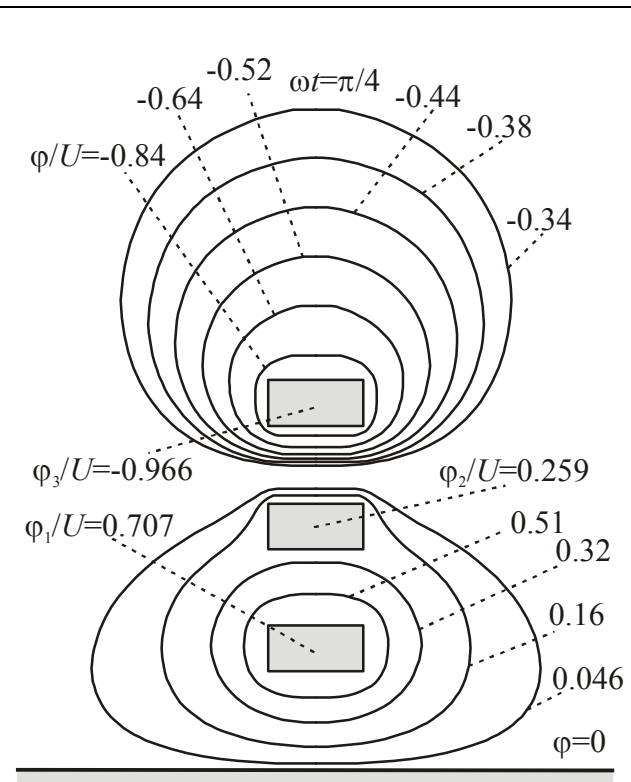




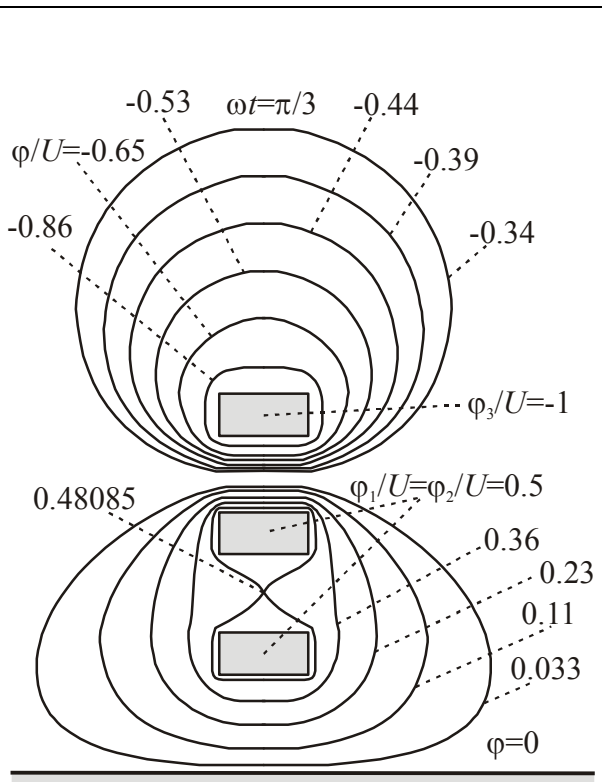
Сл. 4.20а



Сл. 4.20б

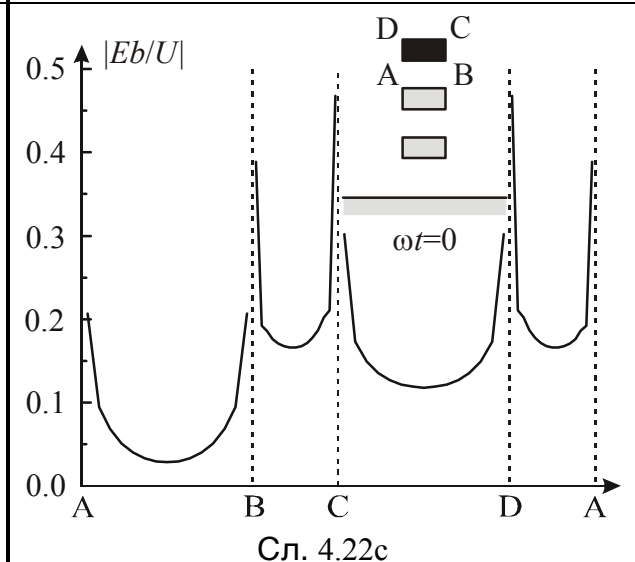
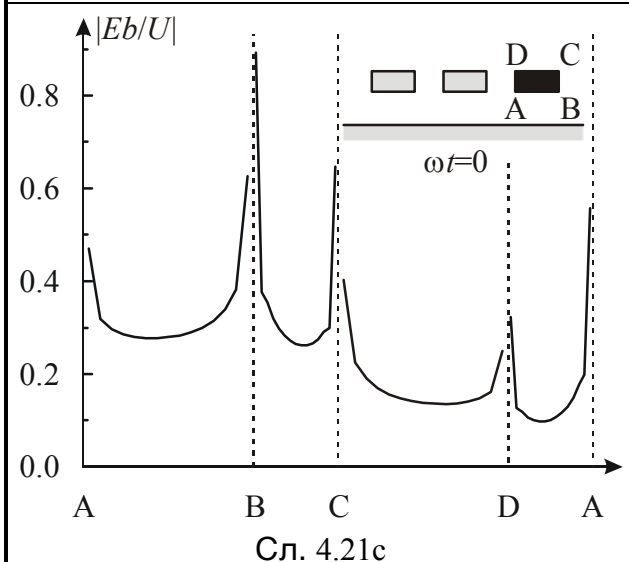
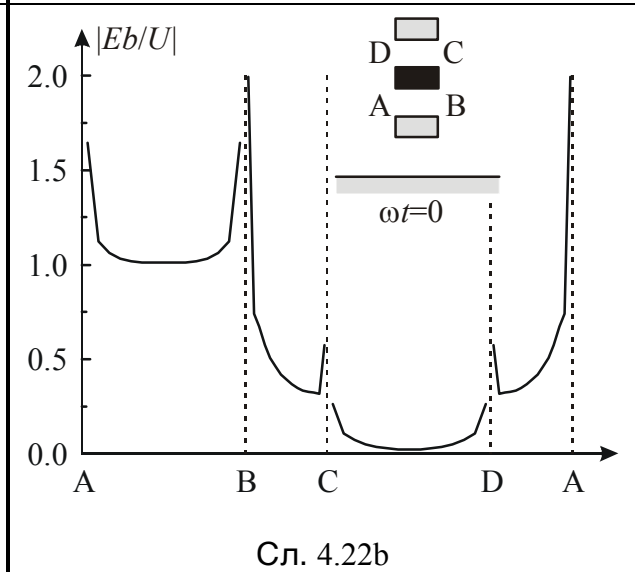
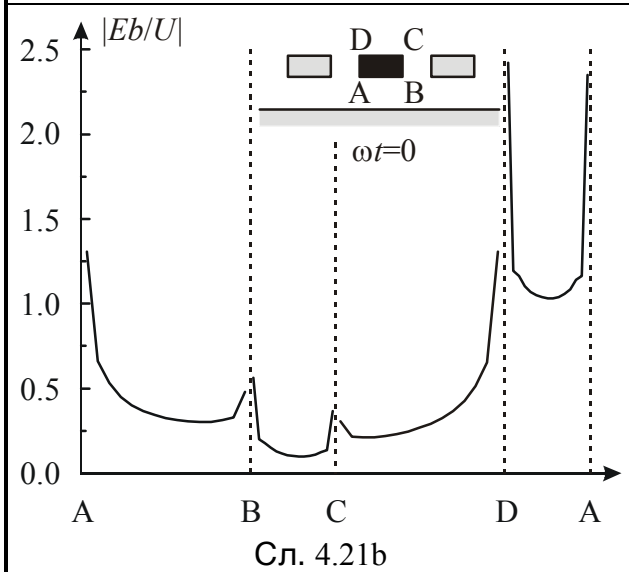
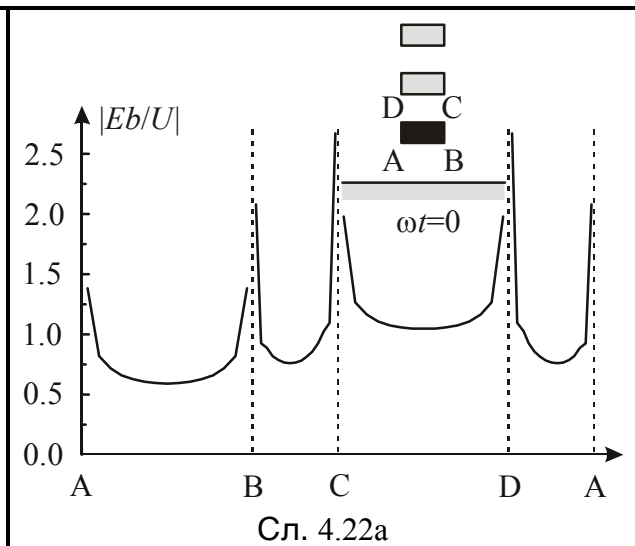
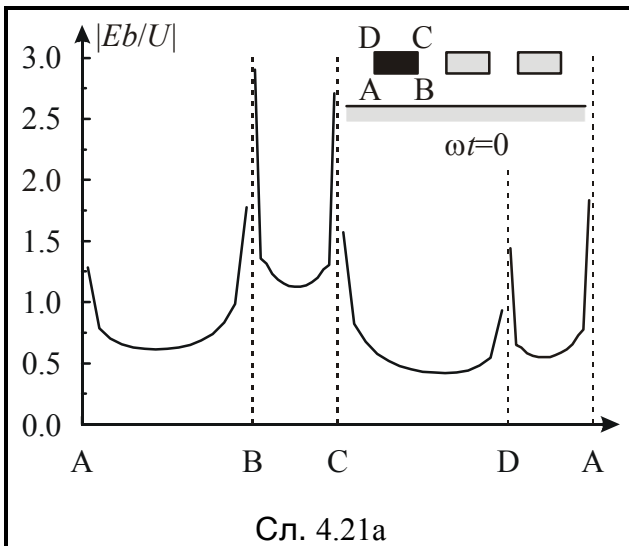


Сл. 4. 20с



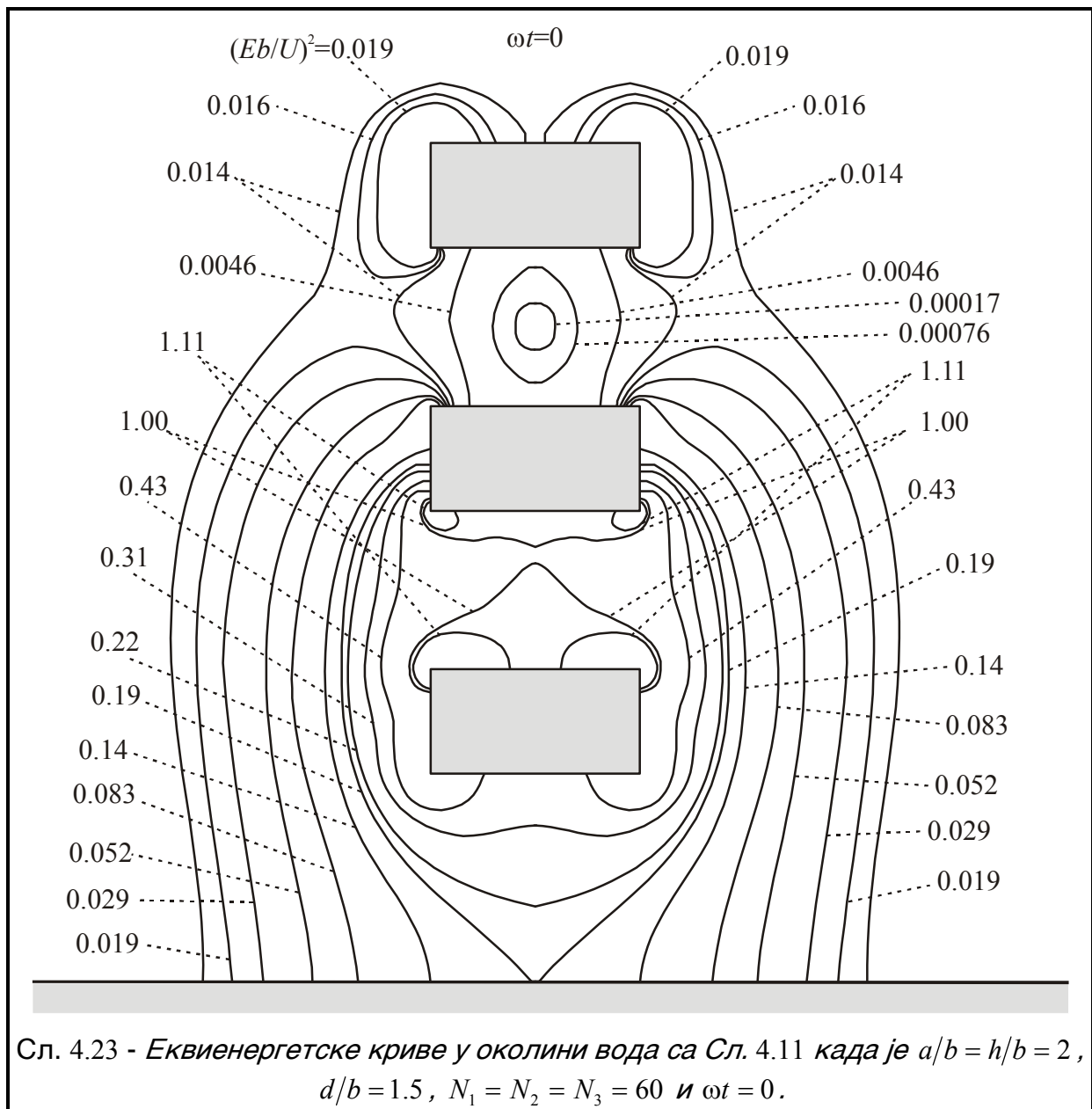
Сл. 4. 20д

Сл. 4.20 - Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 4.11 када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$ и $N_1 = N_2 = N_3 = 60$, за различите вредности ωt .



Сл. 4.21 - Нормализована јачина електричног поља на површини електрода вода са Сл. 4.10, када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$, $N_1 = N_2 = N_3 = 60$ и $\omega t = 0$.

Сл. 4.22 - Нормализована јачина електричног поља на површини електрода вода са Сл. 4.11, када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$, $N_1 = N_2 = N_3 = 60$ и $\omega t = 0$.



Сл. 4.23 - Еквиенергетске криве у околини вода са Сл. 4.11 када је $a/b = h/b = 2$, $d/b = 1.5$, $N_1 = N_2 = N_3 = 60$ и $\omega t = 0$.

4.2.2. Прорачун оклопљених водова

У претходном излагању, већ је речено да је примена МЕЕ знатно олакшана уколико се познаје Гринова функција за поједине делове електродног система. Тада се поједине електроде замењују системом ЕЕ, док се утицај осталих електрода одређује на основу познатих Гринових функција. Како је Гринова функција за стално подужно наелектрисање унутар кошуљице правоугаоног попречног пресека смештено паралелно зидовима кошуљице позната [4.10], у случају водова оклопљених правоугаоном кошуљицом, могуће је МЕЕ применити на овај начин.

4.2.2.1 Гринова функција

Гринову функцију за потенцијал сталног подужног наелектрисања велике дужине, постављеног унутар кошуљице правоугаоног попречног пресека, паралелно њеним зидовима (Сл. 4.24), могуће је одредити на више различитих начина. Они су засновани на вишеструкој примени теореме lika [4.10], интеграцији Пуасонове једначине помоћу метода раздвајања променљивих [4.10] или варијације константи [4.6], методу Роговског [4.10], као и на примени конформних пресликавања [4.10]. Наведене технике доводе до решења за потенцијал у облику споро конвергентних

редова, док примена конформних пресликавања захтева решавање трансцедентних једначина [4.10].

У анализи која следи, коришћен је један недавно предложен израз који омогућава тачно и брзо одређивање Грине функције за потенцијал сталног подужног наелектрисања велике дужине, постављеног унутар кошуљице правоугаоног попречног пресека паралелно њеним зидовима, одређен комбинованом применом конформних пресликавања и метода варијације константи [4.10],

$$G(x, y, a, b) = \frac{\varphi}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \ln \left[\frac{\operatorname{ch}\left(\pi \frac{x-a}{B}\right) - \cos\left(\pi \frac{y+b}{B}\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi \frac{x-a}{B}\right) - \cos\left(\pi \frac{y-b}{B}\right)} \times \frac{\operatorname{ch}\left(\pi \frac{x+a}{B}\right) - \cos\left(\pi \frac{y-b}{B}\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi \frac{x+a}{B}\right) - \cos\left(\pi \frac{y+b}{B}\right)} \right] - \frac{2}{\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-p_n a}}{n} \frac{\operatorname{sh}(p_n a)}{\operatorname{sh}(p_n A)} \sin(p_n b) \operatorname{sh}(p_n x) \sin(p_n y), \quad (4.48)$$

где је $p_n = n\pi/B$.



Таблица 4.5

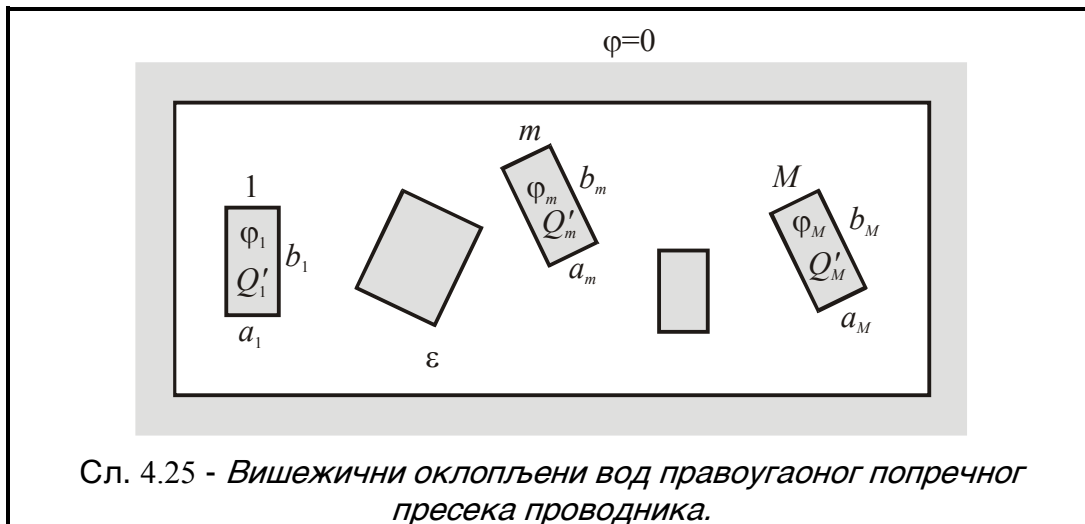
x/A	$4\pi\epsilon G$	број сабраних чланова реда
0.0	0.000 000 000 000 000	1
0.1	0.727 783 163 569 095	8
0.2	1.624 367 149 935 044	8
0.3	3.063 378 724 673 139	9
0.4	7.736 494 640 845 363	10
0.5	3.190 377 888 851 491	10
0.6	1.894 647 366 330 376	11
0.7	1.177 365 101 546 220	13
0.8	0.693 377 542 750 092	14
0.9	0.322 582 773 798 774	16
1.0	0.000 000 000 000 000	19

Посматрањем израза (4.48) може се закључити да чланови добијеног реда опадају са порастом индекса по експоненцијалном закону, тако да овај ред веома брзо конвергира. Конвергенција реда је најбржа на зиду $x = 0$ и опада ка наспрам-

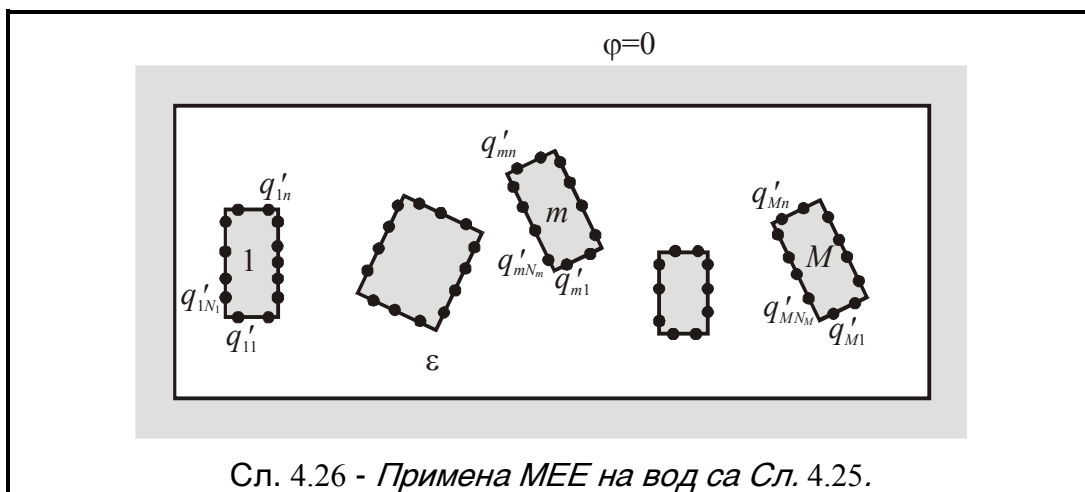
ној страници $x = A$ Такође је конвергенција уколико бржа уколико је страница A већа од странице B . Дакле, конвергенција је најспорија у случају кошуљице квадратног пресека, али су и тада резултати веома добри, што се може видети из Таблице 4.5, у којој је приказано колико чланова реда треба сабрати, тако да Грине функције буду срачунате тачно на шеснаест декадних цифара, када је $A = B$, $a = 0.4A$ и $b = 0.35A$. При томе је нормализована вредност Грине функције за потенцијал $4\pi\epsilon G$ одређена на правцу $y = 0.34A$, док x узима различите вредности [4.10].

4.2.2.2 Примена МЕЕ на оклопљене водове

Посматра се вишежични ваздушни вод правоугаоног попречног пресека проводника оклопљен правоугаоном кошуљицом нултог потенцијала, приказан на Сл. 4.25 [4.12, 4.14]. Приликом примене МЕЕ, системом ЕЕ замењују се само проводници вода, док се утицај кошуљице одређује помоћу Грине функције дате изразом (4.48) (Сл. 4.26). МЕЕ може се применити и тако што се системом ЕЕ поред проводника, замењује и кошуљица вода, што понекада, као што ће се то видети у каснијем излагању, омогућава једноставнији прорачун појединих величина од интереса, (напр. прорачун подужне отпорности вода [4.16]).



Сл. 4.25 - Вишежични оклопљени вод правоугаоног попречног пресека проводника.



Сл. 4.26 - Примена МЕЕ на вод са Сл. 4.25.

Подужна оптерећења електрода Q'_m и њихове потенцијале ϕ_m , $m = 1, 2, \dots, M$ повезује систем линеарних релација дат изразом (4.43). При томе је, слично као и у одељку 4.2.1, наелектрисање проводника једнако алгебарској суми наелектрисања ЕЕ које тај проводник замењују (4.44).

Потенцијал у околини система са Сл. 4.26 може се написати као

$$\varphi = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} G(x, y, x_{mn}, y_{mn}), \quad (4.49)$$

где су x_{mn} и y_{mn} , $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ координате тачака у којима су смештене осе ЕЕ, док су са q'_{mn} , $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ означена наелектрисања одговарајућих ЕЕ. $G(x, y, x_{mn}, y_{mn})$ је Гринова функција за потенцијал подужног наелектрисања, задата изразом (4.48).

Систем линеарних једначина на основу којег се одређују непозната наелектрисања ЕЕ формира се на основу граничног услова за потенцијал на површини електрода, на начин претходно описан у одељку 4.1.1. Услов да се кошуљица налази на нултом потенцијалу аутоматски је задовољен, са тачношћу којом је одређена Гринова функција (4.48). Уз примену теорије логаритамских потенцијала, формиран систем линеарних једначина има облик

$$\varphi_{ij} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} G(x_{ij}, y_{ij}, x_{mn}, y_{mn}), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N_i. \quad (4.50)$$

У претходном изразу, са φ_{ij} обележен је потенцијал на површини j -те ЕЕ, смештене на површини i -те електроде електродног система.

Након одређивања наелектрисања ЕЕ, остале величине од интереса (потенцијал, јачина електричног поља у околини електрода и на њиховој површини, делимичне капацитивности) одређују се на начин изложен у 4.1.1. Значајно је напоменути да се вектор електричног поља на површини кошуљице одређује помоћу израза (4.7).

4.2.2.3 Поређење са другим методима

Проблем оклопљених водова полигоналног попречног пресека проводника (најчешће коаксијалних водова правоугаоног попречног пресека) решаван је на више различитих начина.

Тако се параметри коаксијалног вода са Сл. 4.27 могу одредити помоћу једног од облика Шварц-Кристофелове трансформације [4.1, 4.5b],

$$\underline{z} = C_1 \int \left[\frac{(t^2 - \xi_1^2)}{(t^2 - 1)(t^2 - k^{-2})(t^2 - \xi_2^2)} \right]^{1/2} dt + C_2, \quad (4.51)$$

где су C_1 и C_2 комплексне константе. Параметри ξ_1 , ξ_2 и k одређују се на основу израза,

$$\frac{a}{B} = \frac{I(\xi_1, 1)}{I(0, \xi_1) + I(1, k^{-1})}, \quad \frac{b}{B} = \frac{I(0, \xi_1)}{I(0, \xi_1) + I(1, k^{-1})} \quad \text{и} \quad \frac{A}{B} = \frac{I(k^{-1}, \xi_2)}{I(0, \xi_1) + I(1, k^{-1})} \quad \text{где је} \quad (4.52)$$

$$I(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{(t^2 - \xi_1^2)}{(t^2 - 1)(t^2 - k^{-2})(t^2 - \xi_2^2)} \right]^{1/2} dt. \quad (4.53)$$



Овако одређена, карактеристична импеданса вода има облик

$$Z_C = 30\pi\sqrt{\mu_r/\varepsilon_r} K(k')/K(k), \quad (4.54)$$

где је $K(k)$ потпуни елиптички интеграл прве врсте модула k (4.42) и $k' = \sqrt{1-k^2}$, при чему се модуло k одређује из услова задатих изразом (4.52). У изразу (4.54), са ε_r и μ_r означене су релативна диелектрична константа и релативна магнетна пропустљивост средине у којој је вод смештен, респективно. Очигледно је да је за примену конформних пресликавања за решавање вода са Сл. 4.27 неопходно решити систем нелинеарних једначина (4.52), што је скопчано са нумеричким одређивањем интеграла (4.53).

Параметри вода са Сл. 4.27 могу се одредити и применом тзв. ортонормалне блок анализе (orthonormal block-analysis) [4.2]. У овом случају се решење за потенцијал у међуелектродном простору претпоставља у облику сума редова са неограниченим бројем чланова и смењује у Лапласову једначину, при чему се у обзир узимају почетни услови на површини кошуљице и проводника. Након одређивања функције потенцијала, карактеристична импеданса одређује се на уобичајени начин. Тако добијено решење има облик

$$Z_C = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{4} \left\{ \left(\frac{0.5A-d_2}{d_1} \right) + \left(\frac{0.5B-d_1}{d_2} \right) + \frac{d_1^2+d_2^2}{3d_1d_2} - \left(\frac{1}{\pi} \right) \left[\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{m_p Y_p}{p^2} \frac{d_2^2}{d_1^2} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{n_p X_p}{p^2} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (4.55)$$

где су X_p и Y_p решења система линеарних једначина,

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + B_k \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} X_p + D_k. \end{aligned} \quad (4.56)$$

При томе су са ε и μ означене диелектрична константа и магнетна пропустљивост средине у којој се вод налази, док су параметри у изразима (4.55) и (4.56),

$$d_1 = (B - b)/2, d_2 = (A - a)/2,$$

$$a_{kp} = (2k/\pi) \frac{d_1/d_2}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} m_p, c_{kp} = (2k/\pi) \frac{d_1/d_2}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} n_p$$

$$B_k = (2k/\pi^2)(d_1/d_2)^2, D_k = (2k/\pi^2), \quad (4.57)$$

$$m_p = \sinh(p\pi d_1/d_2) \operatorname{sech}(p\pi B/2d_2) \cosh[p\pi(0.5B - d_1)/d_2] \text{ и}$$

$$n_p = \sinh(p\pi d_2/d_1) \operatorname{sech}(p\pi A/2d_1) \cosh[p\pi(0.5a - d_2)/d_1].$$

За решавање коаксијалног вода правоугаоног попречног пресека, развијен је метод заснован на идеји да се његова капацитивност одреди суперпозицијом капацитивности између "равних делова" електроде (која се одређује као капацитивност равнoг кондензатора) и капацитивности "L профила" у околини угла електроде (одређене применом конформног пресликавања) [4.4]. Помоћу описаног метода, за карактеристичну импедансу ваздушног вода са Сл. 4.27 добија се израз облика

$$Z_c = \frac{376.62}{4 \left[\left(\frac{b}{A-a} + \frac{a}{B-b} \right) + \frac{1}{\varepsilon} (C_{f1} + C_{f2}) \right]} [\Omega], \text{ где је} \quad (4.58)$$

$$C_{f1} = \frac{\varepsilon}{\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{4} + \frac{(A-a)^2}{4(B-b)^2} \right) + 2 \frac{B-b}{A-a} \arctan \left(\frac{A-a}{B-b} \right) \right] \text{ и} \quad (4.59)$$

$$C_{f2} = \frac{\varepsilon}{\pi} \left[\ln \left(\frac{1}{4} + \frac{(B-b)^2}{4(A-a)^2} \right) + 2 \frac{A-a}{B-b} \arctan \left(\frac{B-b}{A-a} \right) \right].$$

Применом метода квадратне мреже (square net method) [4.3], решен је специјални случај коаксијалног правоугаоног вода, када су кошуљица и проводник квадратног попречног пресека ($A = B$ и $a = b$). На основу добијених резултата предложена је емпиријска формула за прорачун карактеристичне импедансе ваздушног ($\varepsilon = \varepsilon_0$) оклопљеног вода, квадратног попречног пресека проводника и кошуљице,

$$Z_c = 136.7 \log(0.9259s) [\Omega] \quad (4.60)$$

која важи за $s \geq 2$, где је s однос странице кошуљице и проводника.

Таблица 4.6

$Z_c [\Omega]$				
израз (4.54) Реф. [4.1, 4.5]	израз (4.55) Реф. [4.2]	израз (4.60) Реф. [4.3]	израз (4.58) Реф. [4.4]	МЕЕ
60.528	60.645	60.652	60.405	60.503

У Таблици 4.6 налазе се вредности карактеристичне импедансе Z_c вода приказаног на Сл. 4.27 одређене применом набројаних метода укључујући и МЕЕ, за $A = B = 3a = 3b$, $\mu = \mu_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$. Код примене МЕЕ унутрашњи проводник замењен је са $N_1 = 160$ ЕЕ, док је утицај кошуљице одређен помоћу Гринеове функције (4.48).

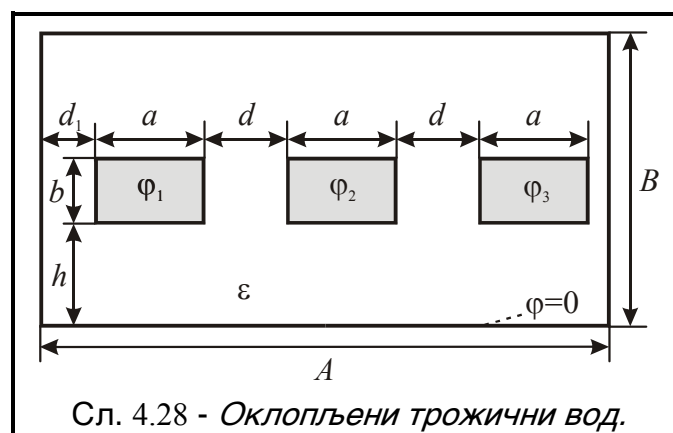
На основу вредности из Таблице 4.6, може се закључити да се применом МЕЕ добија вредност најближа тачној вредности карактеристичне импедансе, одређеној помоћу конформног пресликавања (4.51) [4.3].

4.2.2.4 Нумерички резултати

На основу анализе изложене у одељку 4.2.2, написан је програм за прорачун оклопљених водова полигоналног попречног пресека. Анализирани су оклопљени тројични водови правоугаоног попречног пресека проводника (Сл. 4.28), при чему је претпостављено да су напони проводника фазно померени за $2\pi/3$, тј. да је,

$$\varphi_1 = U \cos(\omega t), \quad \varphi_2 = U \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{и} \quad \varphi_3 = U \cos(\omega t + 2\pi/3). \quad (4.61)$$

Унутрашње електроде замењене су са 180 ЕЕ ($N_1 = N_2 = N_3 = 60$), док је за одређивање утицаја кошуљице искоришћена Гринова функција (4.48).



Сл. 4.28 - Оклопљени тројични вод.

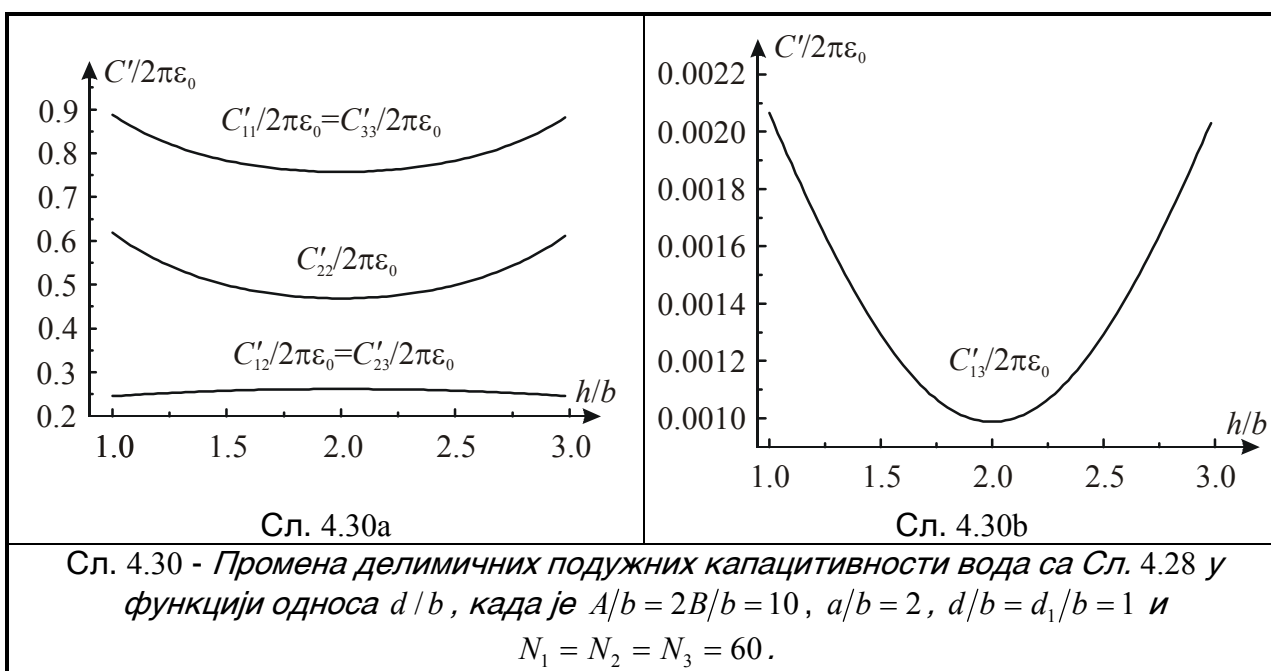
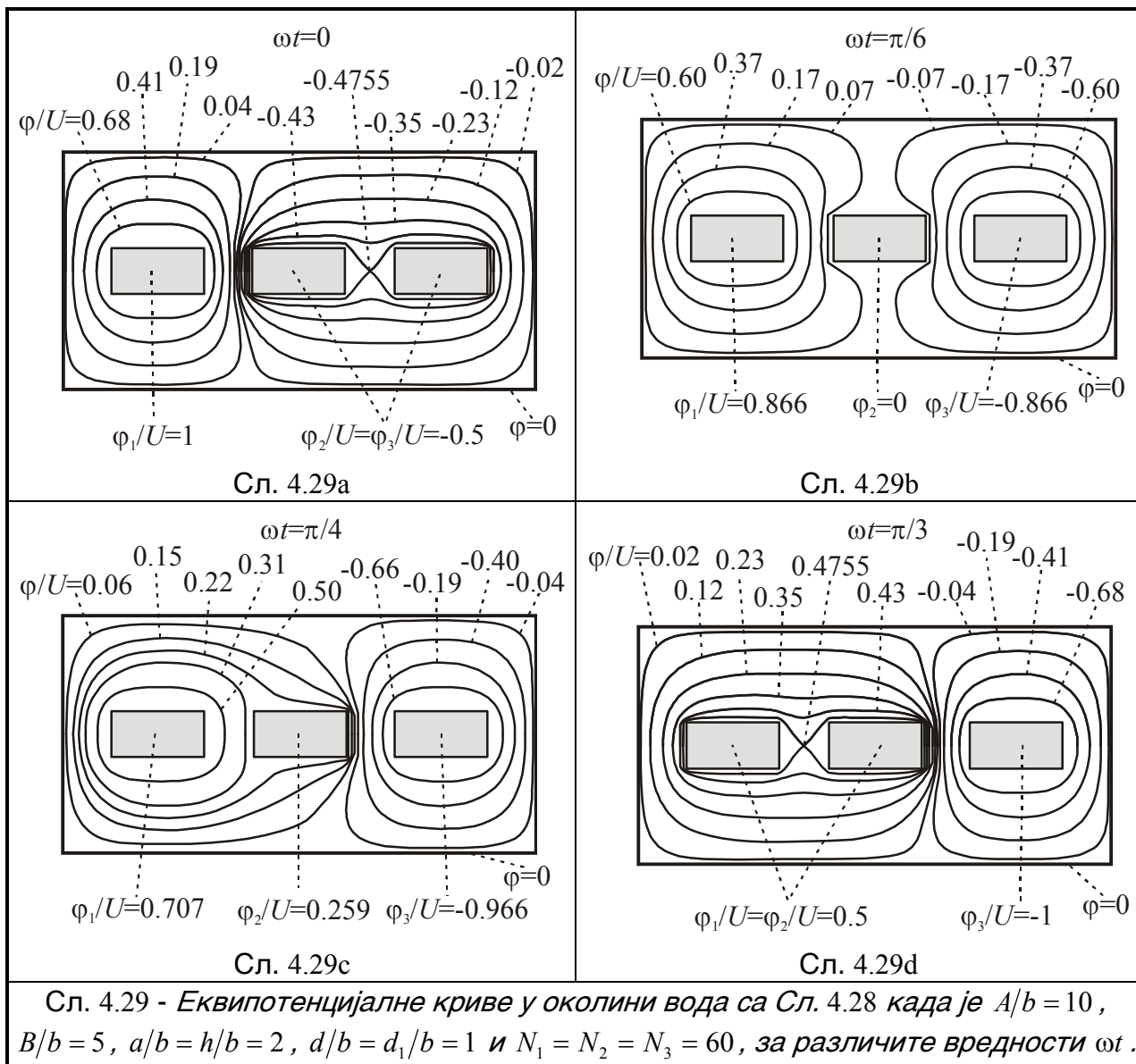
У Таблици 4.7 приказане су нормализоване вредности парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.28 одређене применом МЕЕ за различит број ЕЕ када је $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$.

Еквипотенцијалне криве у околини проводника вода са Сл. 4.28 одређене применом МЕЕ за исте вредности параметара и различито ωt , приказане су на Сл. 4.29a-d.

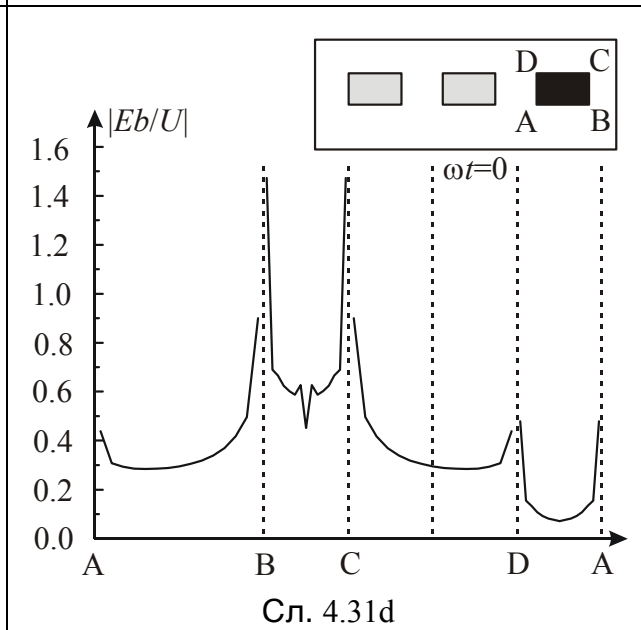
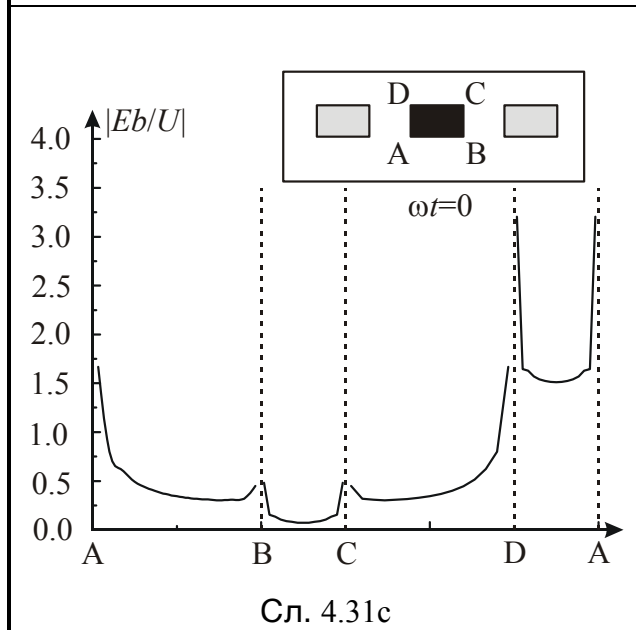
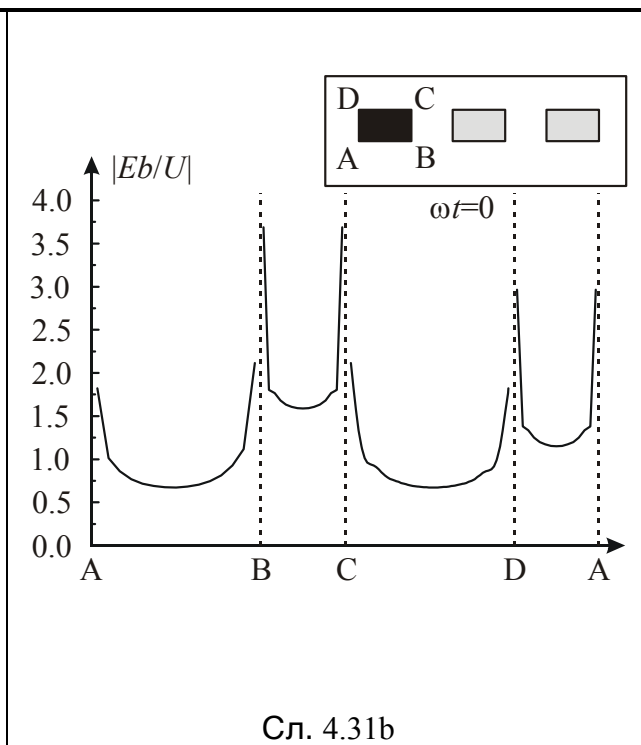
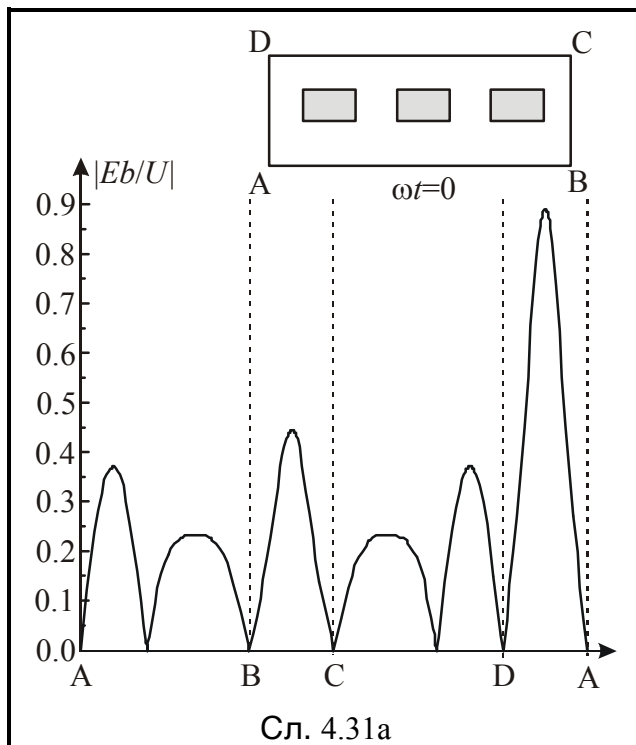
Таблица 4.7

Број ЕЕ	$C'_{11}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{12}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{13}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{22}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{23}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{33}/2\pi\epsilon_0$
$N_1 = N_2 = N_3 = 20$	0.762	0.264	0.000 963	0.472	0.264	0.762
$N_1 = N_2 = N_3 = 40$	0.759	0.263	0.000 980	0.469	0.263	0.759
$N_1 = N_2 = N_3 = 60$	0.757	0.262	0.000 987	0.468	0.262	0.757

Графици на Сл. 4.30a-b представљају зависност нормализованих вредности делимичних капацитивности вода са Сл. 4.28 од односа h/b , када је $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$ и $a/b = 2$.



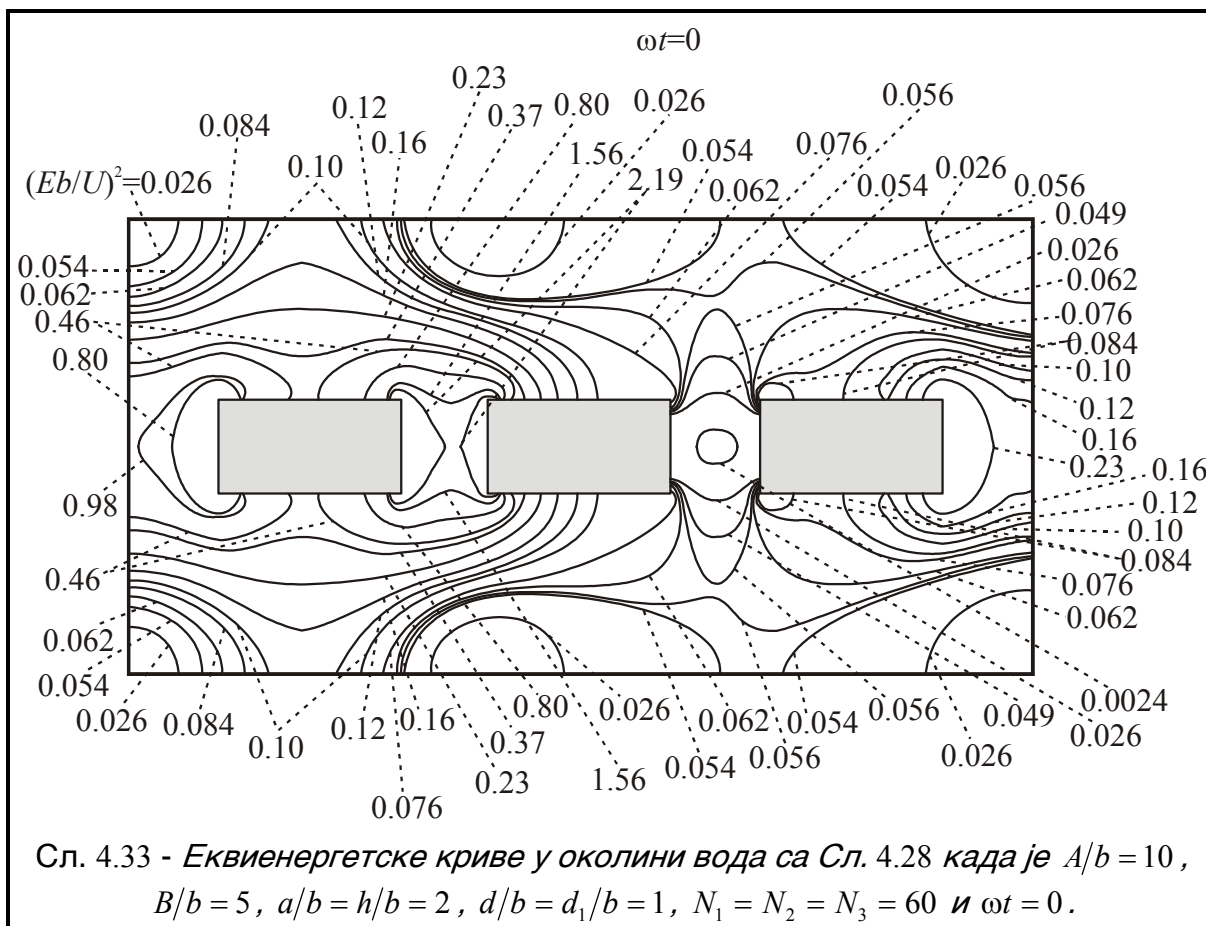
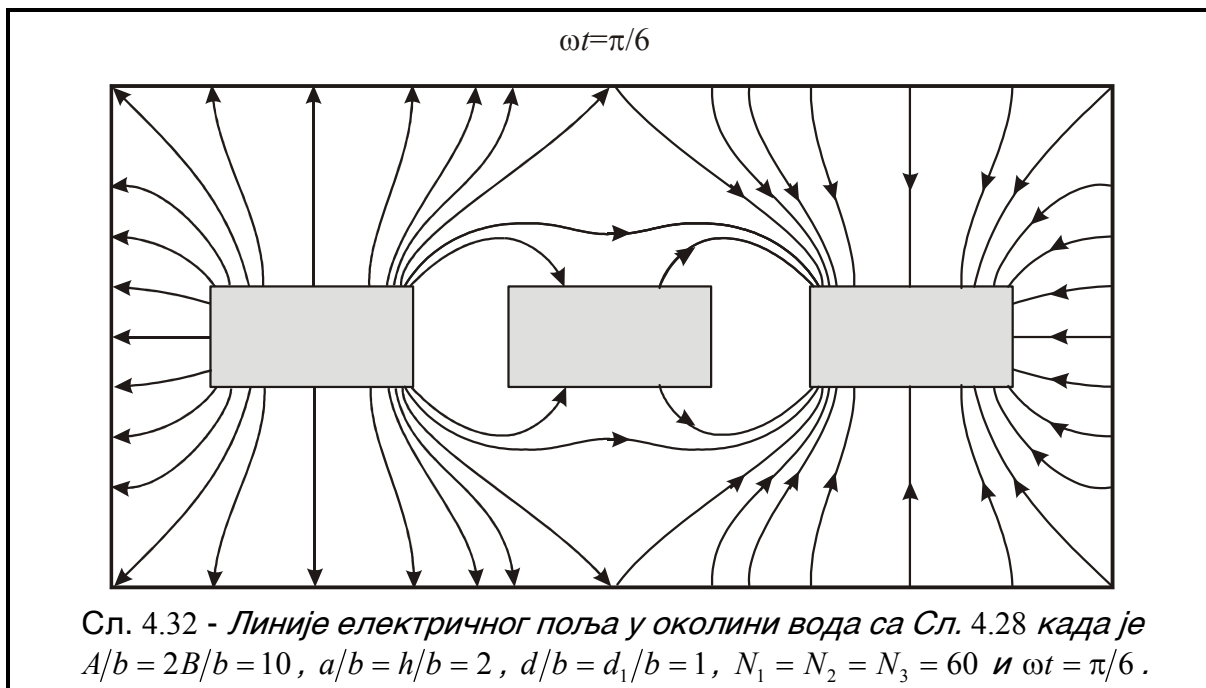
Нормализована вредност јачине електричног поља на површини електрода и кошуљице вода са Сл. 4.28 за $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$ у тренутку $\omega t = 0$, приказана је на Сл. 4.31a-d.



Сл. 4.31 - Нормализована јачина електричног поља на површини електрода и кошуљице вода са Сл. 4.28, када је $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$, $N_1 = N_2 = N_3 = 60$ и $\omega t = 0$.

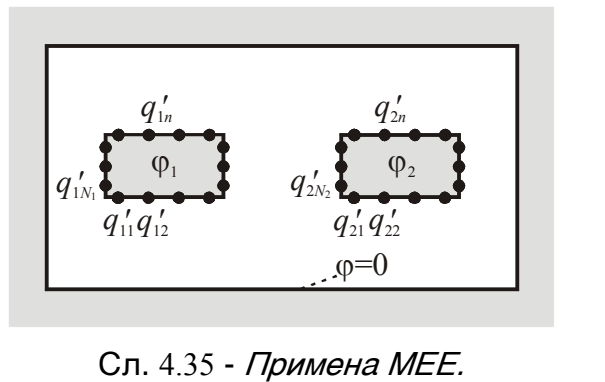
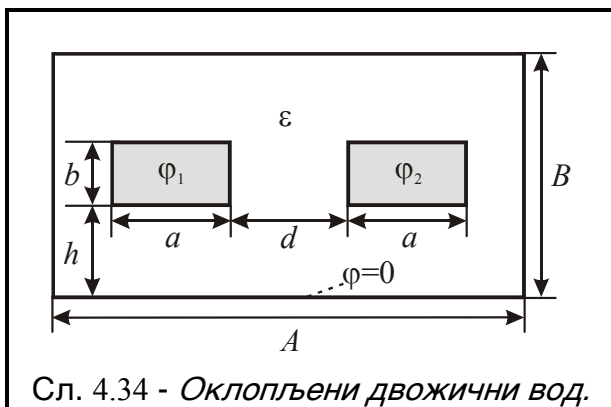
Изглед линија електричног поља у околини проводника вода са Сл. 4.28, одређених за $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$ у тренутку $\omega t = \pi/6$, приказан је на Сл. 4.32.

Еквиенергетске криве одређене применом МЕЕ за исте вредности параметара у тренутку $\omega t = 0$, приказане су на Сл. 4.33.



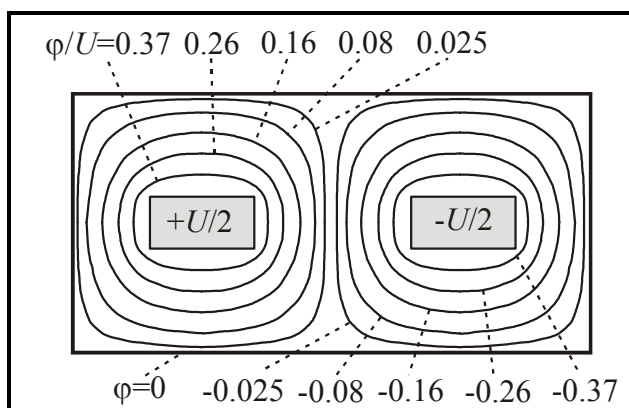
4.2.2.5 Одређивање подужне отпорности

Применом МЕЕ може се одредити подужна отпорност оклопљеног вода [4.9]. Ово је илустровано на примеру оклопљеног двожишног вода симетрично постављених проводника правоугаоног попречног пресека, приказаном на Сл. 4.34 [4.16]. Анализа је спроведена како за симетричан, тако и за асиметричан режим.

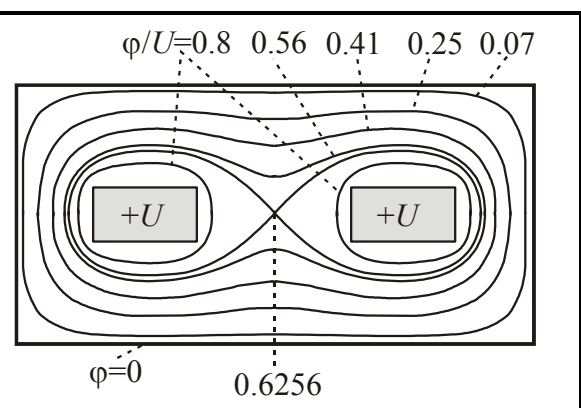


Систем линеарних једначина у коме као непознате фигуришу наелектрисања EE , q'_{mn} , $m = 1, 2, n = 1, 2, \dots, N_m$, формира се на начин претходно описан у одељку 4.2.2.2 (Сл. 4.35). Након одређивања наелектрисања EE , остале величине од интереса (потенцијал, делимичне подужне капацитивности, јачина електричног поља у околини проводника и на њиховој површини), одређују се применом процедура стандардних за МЕЕ [4.8].

Изглед еквипотенцијалних кривих у околини проводника вода са Сл. 4.34 у симетричном ($\phi_1 = -\phi_2 = U/2$) и асиметричном ($\phi_1 = \phi_2 = U$) режиму, одређен применом МЕЕ за $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = 3$ приказан је на Сл. 4.35а-б. При томе су унутрашњи проводници замењени са $N_1 = N_2 = 80$ ЕЕ.



Сл. 4.36а - Симетричан режим.



Сл. 4.36б - Асиметричан режим.

Сл. 4.36 - Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 4.34, када је $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = 2$, $d/b = 3$ и $N_1 = N_2 = 80$.

Подужна отпорност R' двојичног вода са Сл. 4.34 може се одредити применом МЕЕ, помоћу процедуре предложене у [4.9]. При томе се полази од обрасца за подужну снагу Џулових губитака,

$$R'|I|^2 = \oint_{C_1} R_s |H_t|^2 dl + \oint_{C_2} R_s |H_t|^2 dl + \oint_{C_0} R_s |H_t|^2 dl. \quad (4.61)$$

У изразу (4.61), са C_1 и C_2 су означене контуре на које се ослањају попречни пресеци електрода, док је C_0 контура кошуљице. Први и други сабирак на десној страни (интеграли по контурама C_1 и C_2) представљају подужну снагу Џулових губитака у електродама, док је трећи члан (интеграл по контури C_0), подужна снага Џулових

губитака на кошуљици. При томе је са H_t обележена тангенцијална компонента магнетног поља, док је I струја кроз проводнике вода. Површинска отпорност материјала од којег је начињена кошуљица и електроде вода, у претходном изразу означена са R_S , дефинише се [4.7] као,

$$R_S = \sqrt{\frac{\mu\pi f}{\sigma}}, \quad (4.62)$$

где су μ и σ магнетна пропустљивост, односно специфична отпорност материјала, док је f ознака за фреквенцију.

Израз (4.61) комбинује се са релацијама

$$I = q' / \sqrt{\varepsilon\mu} \text{ и } E_n / H_t = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad (4.63)$$

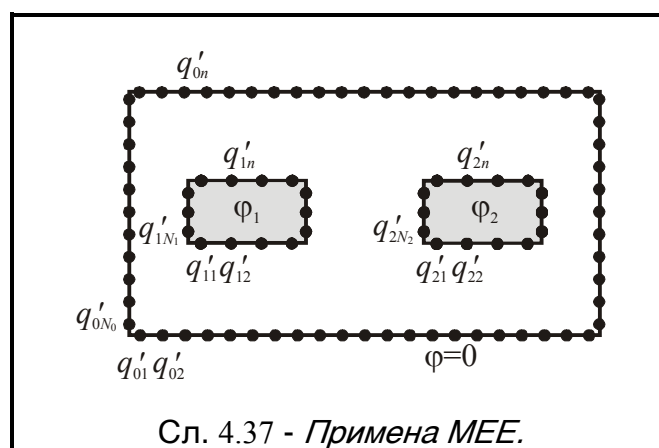
где је q' подужно оптерећење проводника, E_n нормална компонента електричног поља, док је са ε означена диелектрична константа средине у којој се проводници налазе. Када се узме у обзир чињеница да се интензитет електричног поља на површини електроде одређује на основу израза (4.8), као и то да је укупно оптерећење електроде једнако алгебарској суми наелектрисања EE којима је посматрана електрода замењена (4.2), изрази на основу којих је могуће одредити подужну отпорност R' двојичног вода са Сл. 4.34, имају облик,

$$R' \left(\sum_{n=1}^{N_1} q'_{1n} \right)^2 = R_S \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{N_m} \frac{q'_{mn}{}^2}{l_{mn}} + \sqrt{\mu\varepsilon} \oint_{C_0} R_S |H_t|^2 dl, \quad (4.64)$$

за симетричан режим, односно

$$R' \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} \right)^2 = R_S \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{N_m} \frac{q'_{mn}{}^2}{l_{mn}} + \sqrt{\mu\varepsilon} \oint_{C_0} R_S |H_t|^2 dl, \quad (4.65)$$

за асиметричан режим. У претходна два израза, са q'_{mn} , $m = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots, N_m$, означена су наелектрисања EE , док је l_{mn} , $m = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots, N_m$, ширина тракастог дела површине електроде који замењује једна EE .



Из израза (4.64) и (4.65), очигледно је да је за одређивање подужне отпорности R' неопходно нумерички одредити вредност интеграла $\oint_{C_0} R_S |H_t|^2 dl$. Међутим,

МЕЕ је могуће применити и тако што ће поред унутрашњих електрода и кошуљица оклопљеног вода бити замењена системом ЕЕ (Сл. 4.37). У том случају, као Гринова функција не користи се израз (4.48), па је функција потенцијала има облик,

$$\varphi = \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^{N_0} q'_{mn} G(x, y, x_{mn}, y_{mn}) + \varphi_0, \quad (4.66)$$

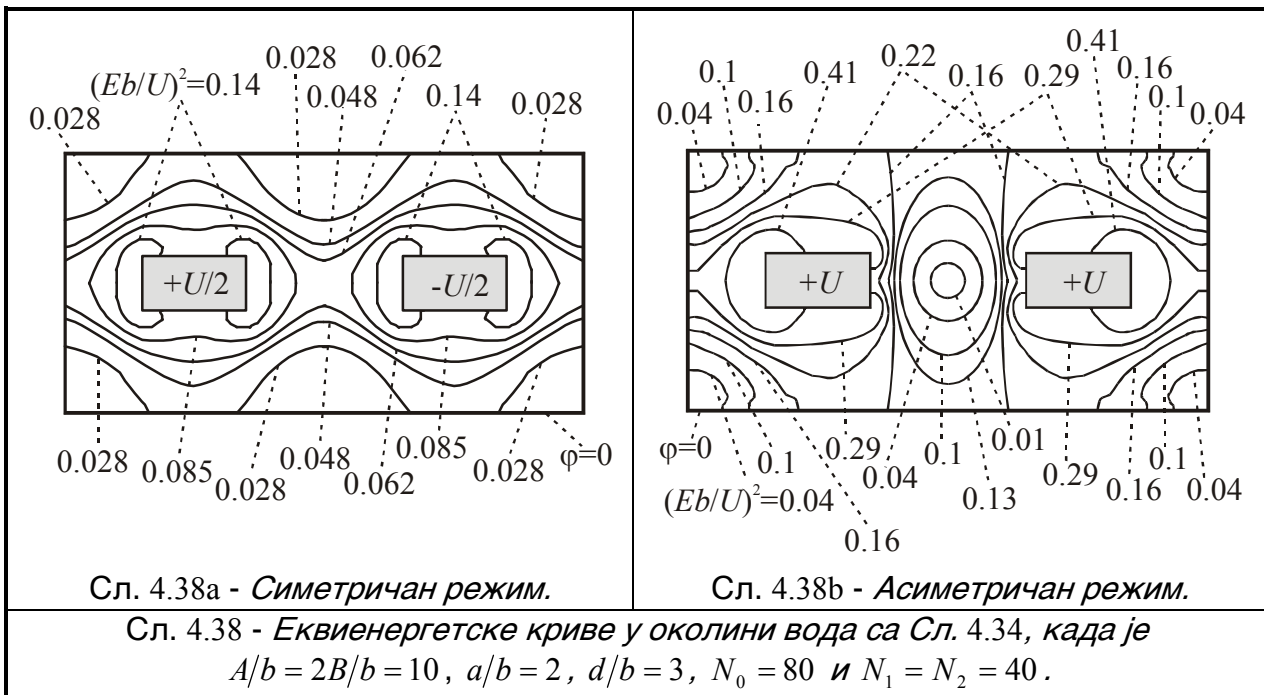
где су q'_{mn} , $m = 0, 1, 2$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ наелектрисања ЕЕ, смештених у тачкама чије су координате x_{mn}, y_{mn} , $m = 0, 1, 2$, $n = 1, 2, \dots, N_m$. Са $G(x, y, x_n, y_n)$ означена је Гринова функција одређена изразом

$$G(x, y, x_n, y_n) = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \quad (4.67)$$

док је φ_0 адитивна константа, која се одређује из услова да је алгебарска сума свих подужних наелектрисања ЕЕ једнака нули,

$$\sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^{N_0} q'_{mn} = 0. \quad (4.68)$$

На основу граничног услова за потенцијал на површини електрода и кошуљице, уз коришћење теорије логаритамских потенцијала, формира се систем линеарних једначина (укључујући и израз (4.67)), чија су решења наелектрисања ЕЕ и адитивна константа φ_0 .



Изглед еквиенергетских кривих у околини проводника вода са Сл. 4.34 у симетричном ($\varphi_1 = -\varphi_2 = U/2$) и асиметричном режиму ($\varphi_1 = \varphi_2 = U$), одређен применом МЕЕ на претходно описани начин (без коришћења Гринове функције (4.48)), приказан је на Сл. 4.38a-b. При томе су димензије вода $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$

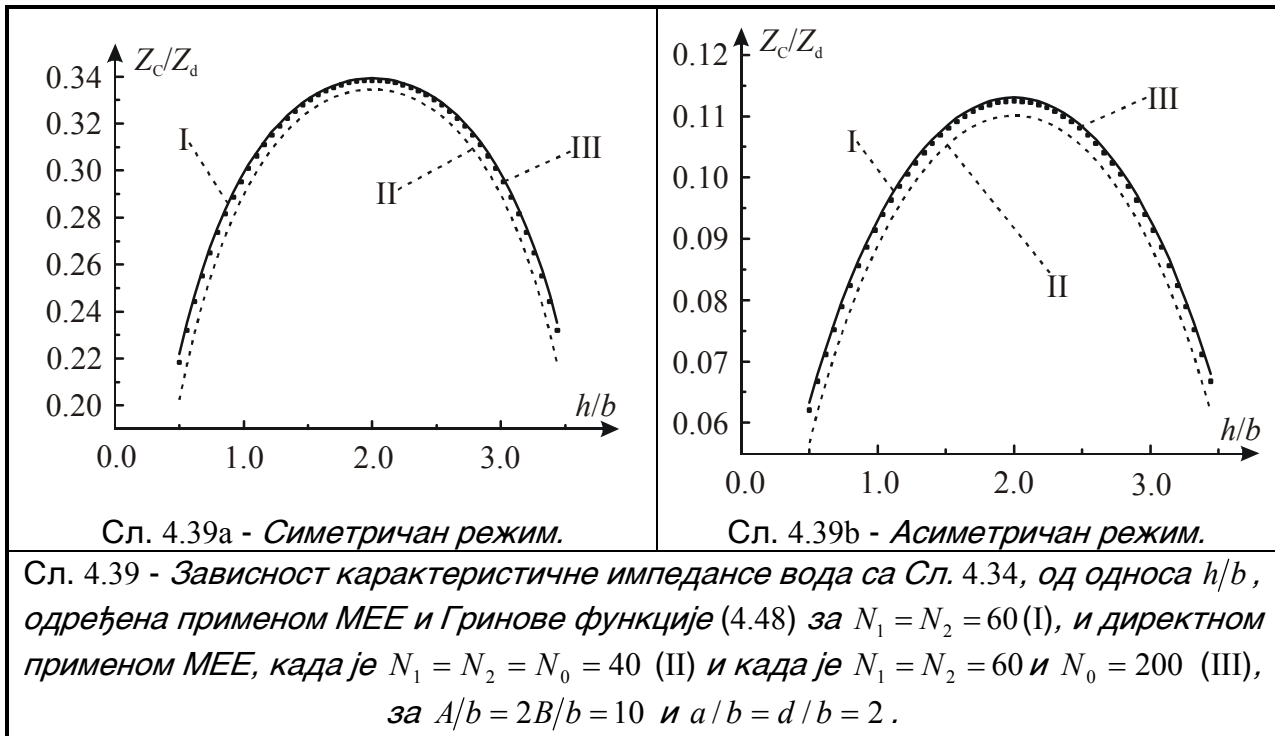
и $d/b = 3$. Унутрашњи проводници замењени су са $N_1 = N_2 = 40$ ЕЕ, док је кошуљица замењена кавезастом структуром формираном од $N_0 = 80$ ЕЕ.

За овако формиран електродни систем (Сл. 4.37), на основу израза (4.61), (4.62), (4.8) и (4.2), може се, као и у случају система са Сл. 4.35, формирати једначина за одређивање подужне отпорности R' двојичног вода са Сл. 4.34. При томе је њен облик

$$R' \left(\sum_{n=1}^{N_1} q'_{1n} \right)^2 = R_S \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^{N_m} \frac{q'_{mn}{}^2}{l_{mn}}, \quad (4.69)$$

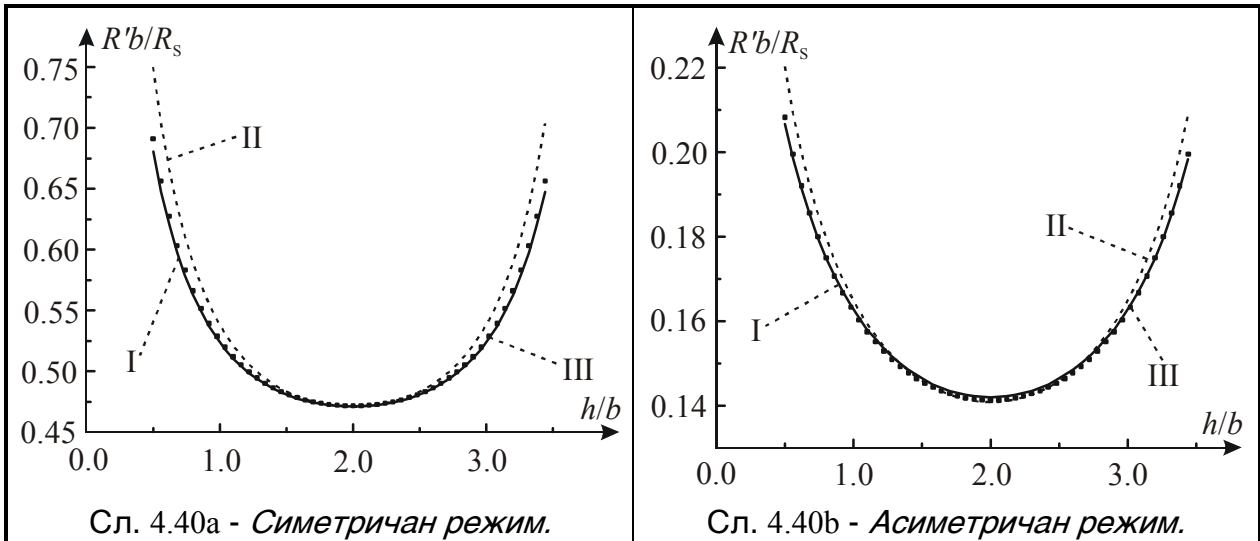
за симетричан режим, док је за асиметричан режим,

$$R' \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} \right)^2 = R_S \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^{N_m} \frac{q'_{mn}{}^2}{l_{mn}}. \quad (4.70)$$



На Сл. 4.39а-б приказана је промена карактеристичне импедансе $Z_c = \sqrt{\epsilon\mu}/C'$ вода са Сл. 4.34 са односом h/b , одређена применом МЕЕ и Гринево функције (4.48) при чему су унутрашњи проводници замењени са $N_1 = N_2 = 60$ ЕЕ (крива I-пуна линија), као и директном применом МЕЕ, када је $N_1 = N_2 = N_0 = 40$ (крива II-тачкице) и када је $N_1 = N_2 = 60$ и $N_0 = 200$ (крива III-испрекидана линија). При томе су димензије вода $A/b = 2B/b = 10$ и $a/b = d/b = 2$. Вредност карактеристичне импедансе нормализована је карактеристичном импедансом диелектрика $Z_d = \sqrt{\mu/\epsilon}$. За исте димензије вода одређена је и зависност нормализоване вредности подужне отпорности R'/R_S од односа h/b , приказана на Сл. 4.40а-б. Ова промена одређена је применом МЕЕ и Гринево функције (4.48) при чему је $N_1 = N_2 = 60$ ЕЕ (крива I-пуна

линија), као и директном применом МЕЕ, за $N_1 = N_2 = N_0 = 40$ (крива II-тачкице), и за $N_1 = N_2 = 60$ и $N_0 = 200$ (крива III-испрекидана линија).

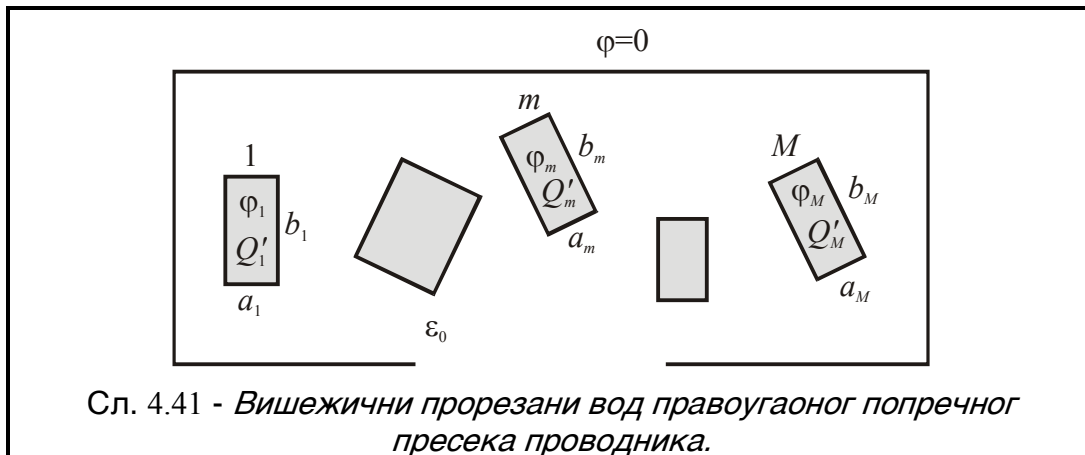


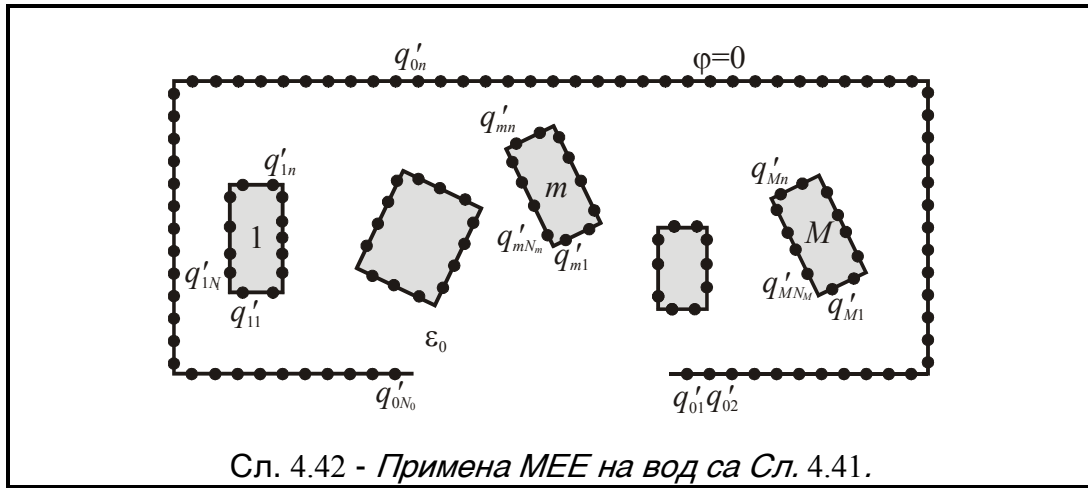
Сл. 4.40 - Зависност подужне отпорности вода са Сл. 4.34, од односа h/b , одређена применом МЕЕ и Гринево функције (4.48) за $N_1 = N_2 = 60$ (I), и директном применом МЕЕ, када је $N_1 = N_2 = N_0 = 40$ (II) и када је $N_1 = N_2 = 60$ и $N_0 = 200$ (III), за $A/b = 2B/b = 10$ и $a/b = d/b = 2$.

Са Сл. 4.39 и 4.40 може се уочити веома добро слагање резултата за карактеристичну импедансу и подужну отпорност добијених на један и други начин, при чему је разлика између њих утолико мања, уколико је број ЕЕ већи. Дакле, у конкретном случају, код одређивања подужне отпорности, не губи се много на тачности када се не користи Гринева функција (4.48), док је са друге стране, избегнута неопходност нумеричког решавања интеграла $\oint_{C_0} R_s |H_t|^2 dl$.

4.2.3. Примена метода еквивалентне електроде на прорачун прорезаних вода

Посматра се вишежични ваздушни вод правоугаоног попречног пресека проводника, оклопљен прорезаном кошуљицом нултог потенцијала, (Сл. 4.41) [4.15]. Када се за решавање вода примењује МЕЕ, и проводници и кошуљица замењују се системом ЕЕ (Сл. 4.42).





Подужна оптерећења електрода Q'_m и њихове потенцијале φ_m , $m = 1, 2, \dots, M$ повезује систем линеарних релација дат изразом (4.43). При томе је наелектрисање поједине електроде једнако алгебарској суми наелектрисања ЕЕ које ту электроду замењују (4.44).

Потенцијал у околини система са Сл. 4.42 може се написати као

$$\varphi = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} G(x, y, x_{mn}, y_{mn}) + \varphi_0, \quad (4.71)$$

где су x_{mn} и y_{mn} , $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ координате тачака у којима су смештене осе ЕЕ, q'_{mn} , $m = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N_m$ су наелектрисања одговарајућих ЕЕ, док је φ_0 адитивна константа која се одређује из услова да је алгебарска сума свих подужних наелектрисања ЕЕ једнака нули,

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_m} q'_{mn} = 0. \quad (4.72)$$

Са $G(x, y, x_n, y_n)$ означена је Гринова функција за потенцијал линијског оптерећења одређена изразом,

$$G(x, y, x_n, y_n) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \quad (4.73)$$

На начин сличан оном описаном у одељку 4.2.2.5, на основу граничног услова за потенцијал на површини електрода и кошуљице, уз коришћење теорије логаритамских потенцијала, формира се систем линеарних једначина (укључујући и израз (4.72)), чија су решења наелектрисања ЕЕ и адитивна константа φ_0 .

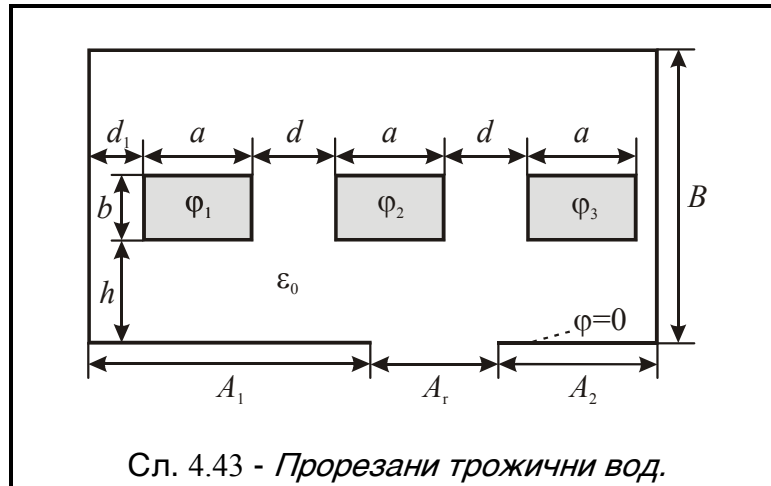
Након одређивања наелектрисања ЕЕ, остале величине од интереса (потенцијал, јачина електричног поља у околини електрода и на њиховој површини, делимичне капацитивности) одређују се на начин изложен у 4.1.1. Од значаја је напоменути да се код одређивања електричног поља на унутрашњој и спољашњој површини кошуљице, нормалној компоненти електричног поља одређеној помоћу израза (4.8), суперпонирају и компоненте електричног поља које стварају подужна наелектрисања осталих ЕЕ, којима је електродни систем са Сл. 4.41 замењен.

4.2.3.1 Нумерички резултати

На основу претходно изложене процедуре, анализирани су тројични водови правоугаоног попречног пресека проводника (Сл. 4.43), при чему је претпостављено да су напони проводника фазно померени за $2\pi/3$, односно да је

$$\varphi_1 = U \cos(\omega t), \quad \varphi_2 = U \cos(\omega t + 2\pi/3) \quad \text{и} \quad \varphi_3 = U \cos(\omega t - 2\pi/3). \quad (4.74)$$

Унутрашње електроде замењене су са укупно 120 ЕЕ ($N_1 = N_2 = N_3 = 40$), док је кошуљица замењена системом од $N_0 = 80$ ЕЕ.



Сл. 4.43 - Прорезани тројични вод.

У Таблици 4.8 приказане су нормализоване вредности парцијалних подужних капацитивности вода са Сл. 4.43 одређене применом МЕЕ за различит број ЕЕ када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$.

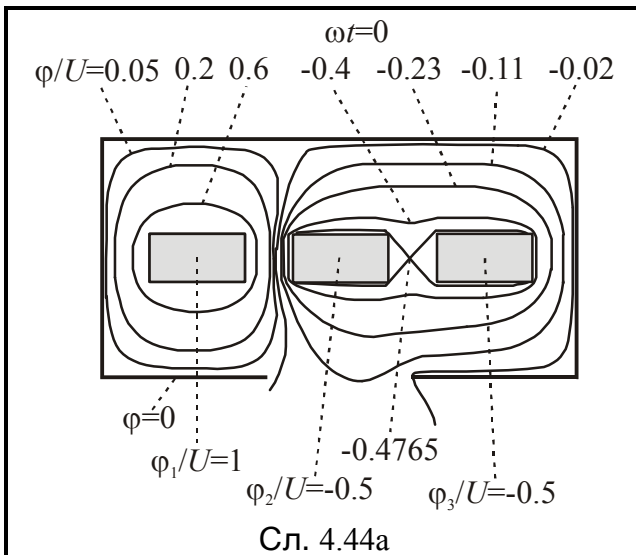
Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 4.43 одређене применом МЕЕ за исте вредности параметара и различито ωt , приказане су на Сл. 4.44a-d.

Таблица 4.8

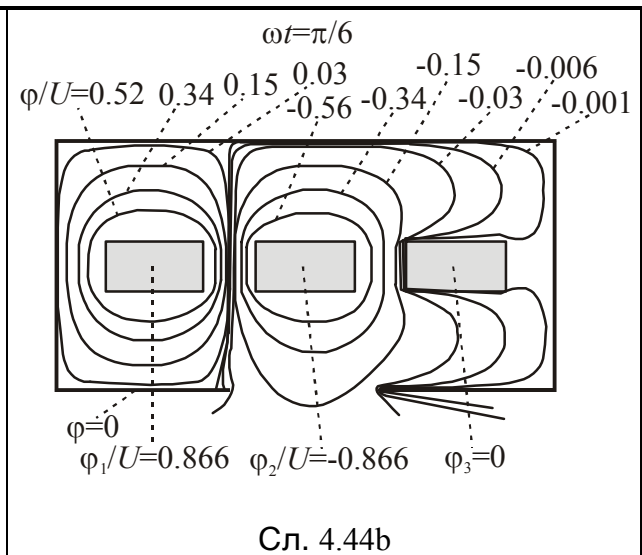
Број ЕЕ	$C'_{11}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{12}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{13}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{22}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{23}/2\pi\epsilon_0$	$C'_{33}/2\pi\epsilon_0$
$N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 20$	0.773	0.2679	0.00154	0.435	0.2679	0.773
$N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$	0.760	0.2673	0.00160	0.429	0.2674	0.760
$N_0/3 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$	0.757	0.2677	0.00162	0.428	0.2677	0.757

Графици на Сл. 4.45a-b представљају зависност нормализованих вредности делимичних подужних капацитивности вода са Сл. 4.43 од односа h/b , када су димензије вода, $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$.

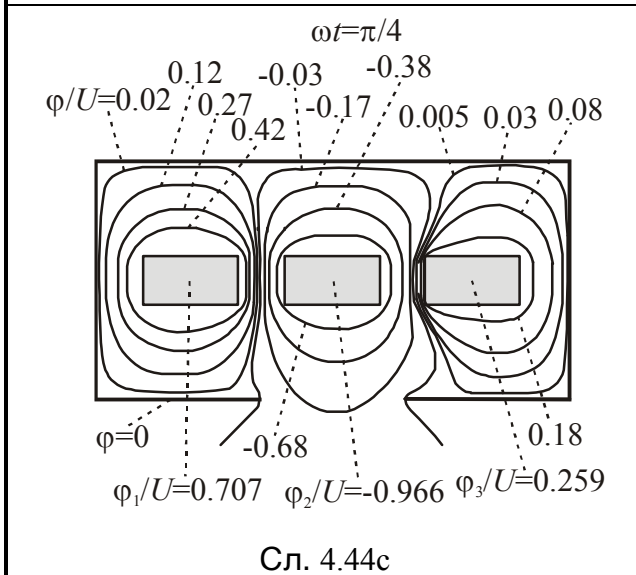
Промена делимичних подужних капацитивности вода са Сл. 4.43 у функцији ширине симетрично постављеног пресека A_r/b , приказана је на Сл. 4.46a-b. При томе је $A/b = 2B/b = 10$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$. Са графика се уочава да присуство пресека не утиче превише на вредност делимичних капацитивности.



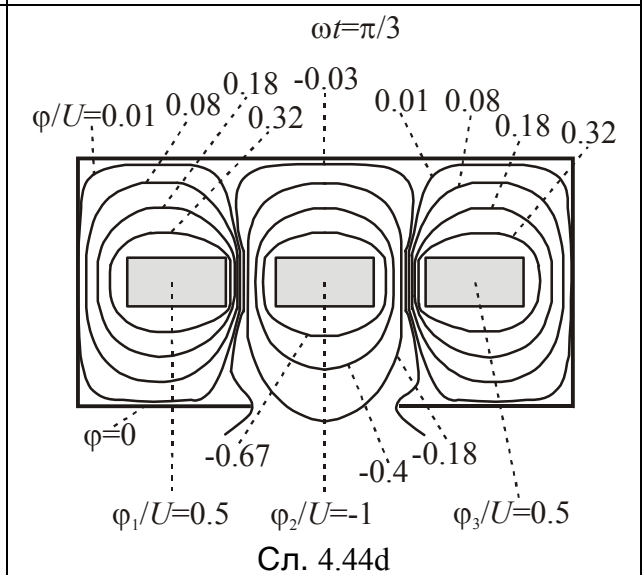
Сл. 4.44а



Сл. 4.44б

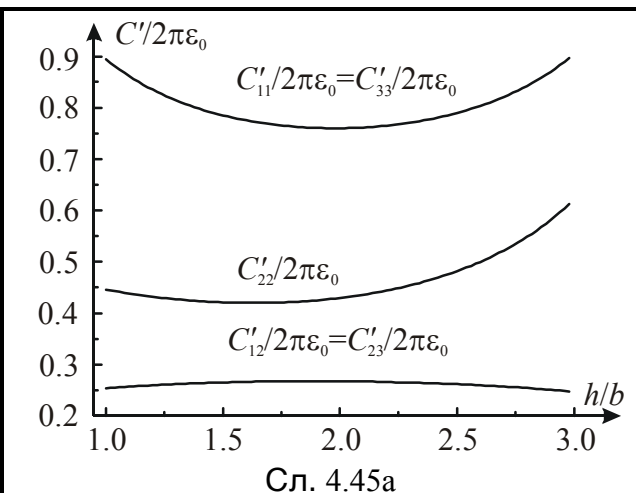


Сл. 4.44с

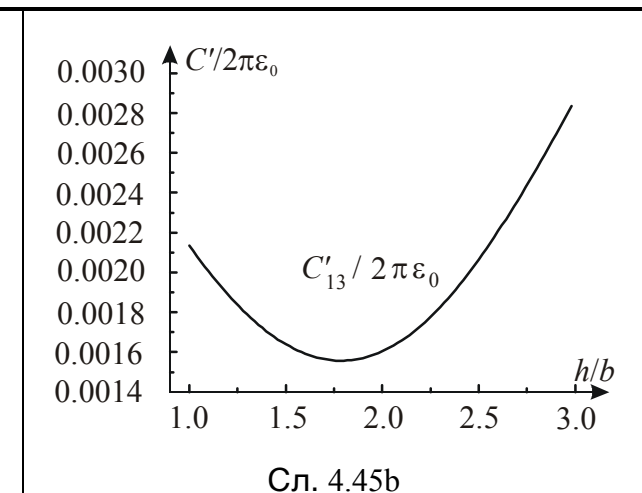


Сл. 4.44д

Сл. 4.44 - Еквипотенцијалне криве у околини вода са Сл. 4.43 када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = h/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$ и $N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$, за различите вредности ωt .

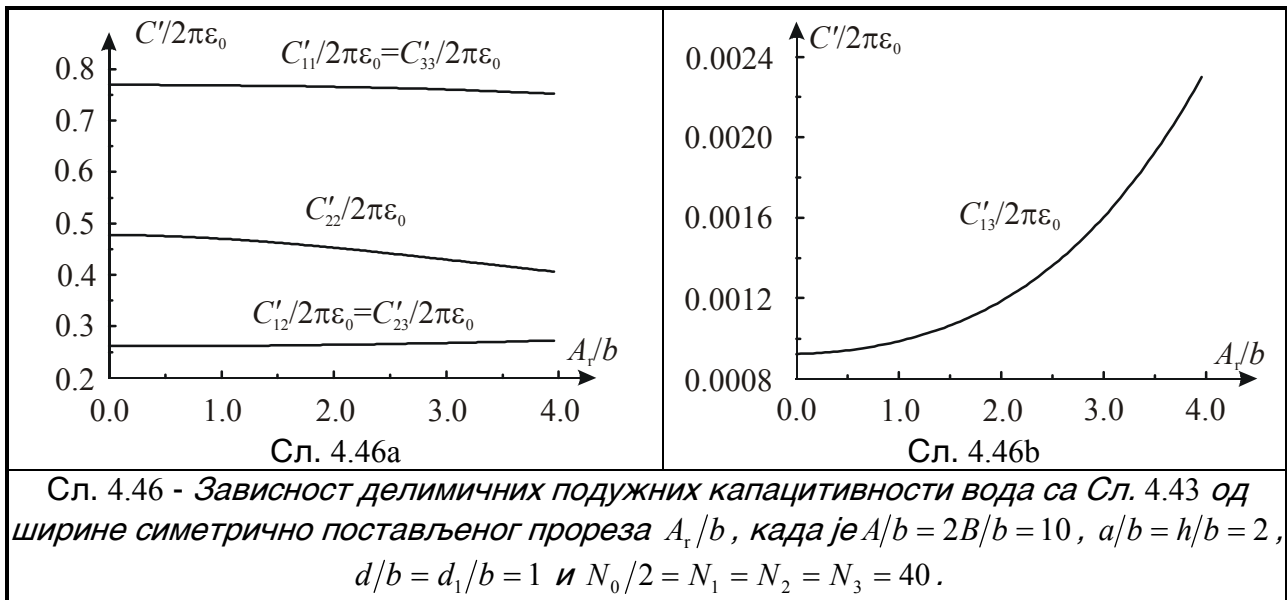


Сл. 4.45а



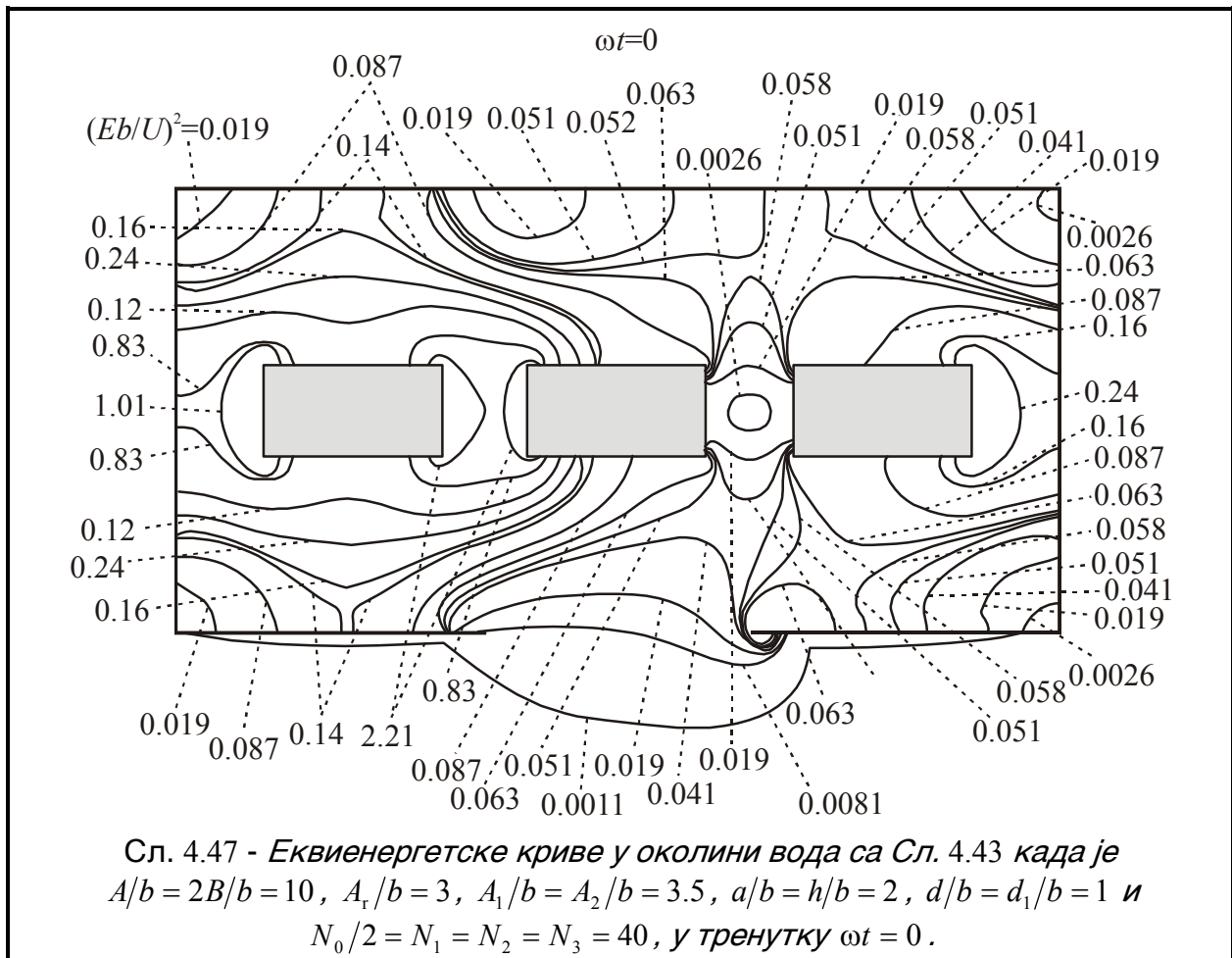
Сл. 4.45б

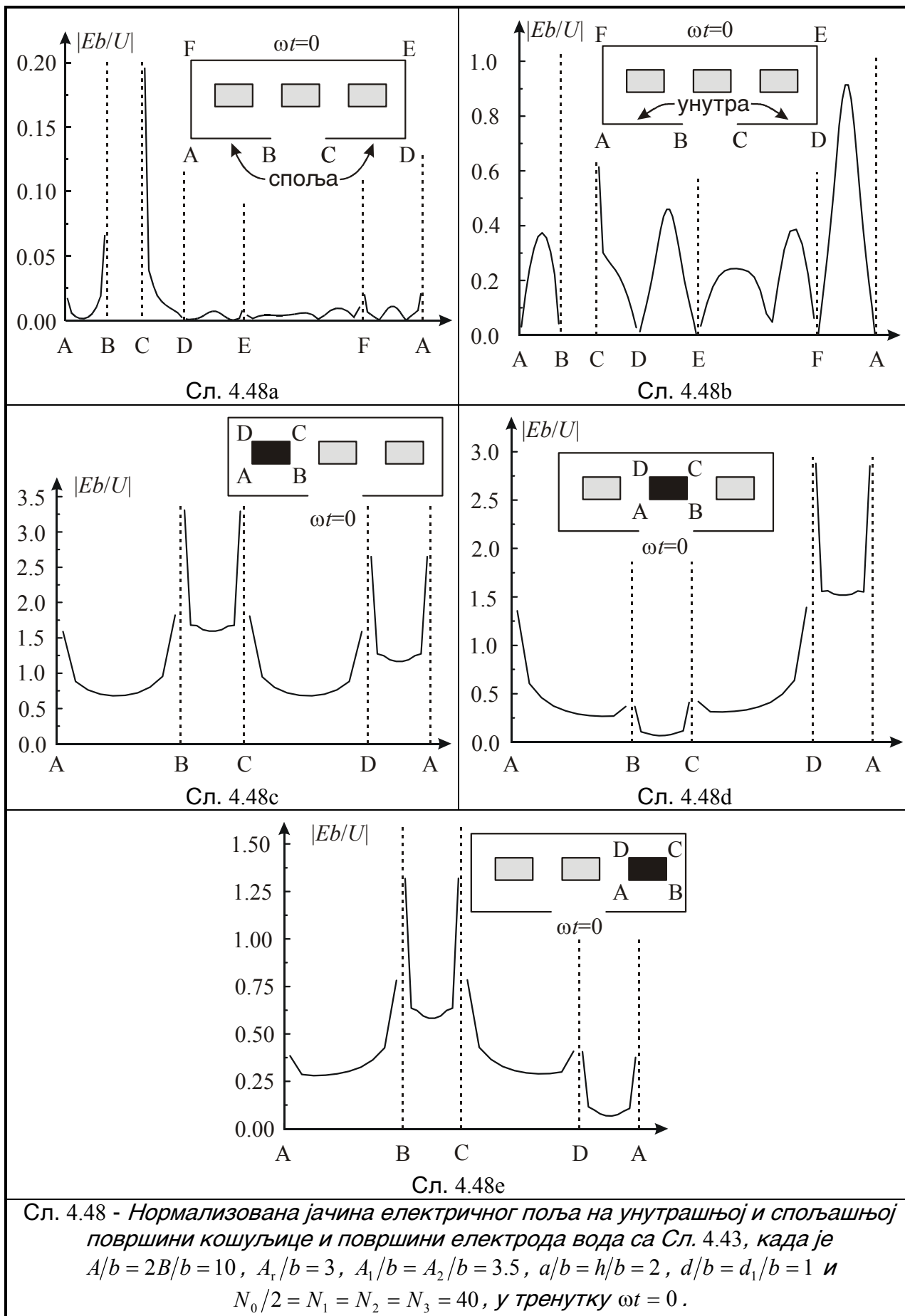
Сл. 4.45 - Промена делимичних подужних капацитивности вода са Сл. 4.43 у функцији односа h/b , када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$ и $N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$.



Изглед еквиенергетских кривих у околини вода са Сл. 4.43 у тренутку $\omega t = 0$, када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$, приказан је на Сл. 4.47.

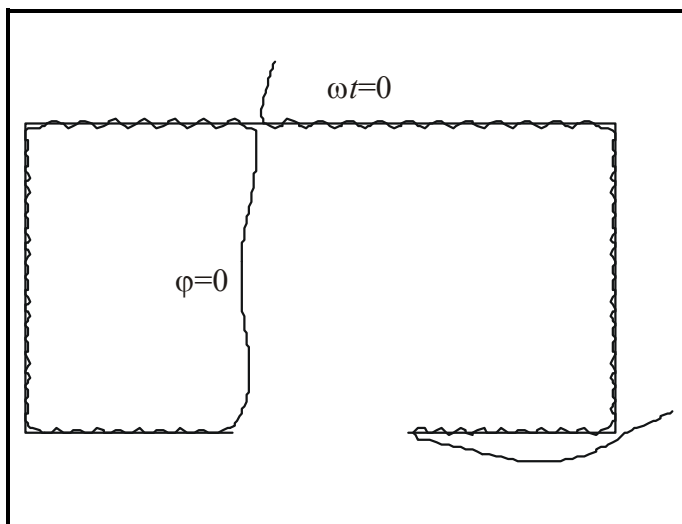
За исте параметре одређена је и нормализована вредност јачине електричног поља на спољашњој и унутрашњој површини кошуљице и површини електрода вода са Сл. 4.43 у тренутку $\omega t = 0$, (Сл. 4.48a-e).



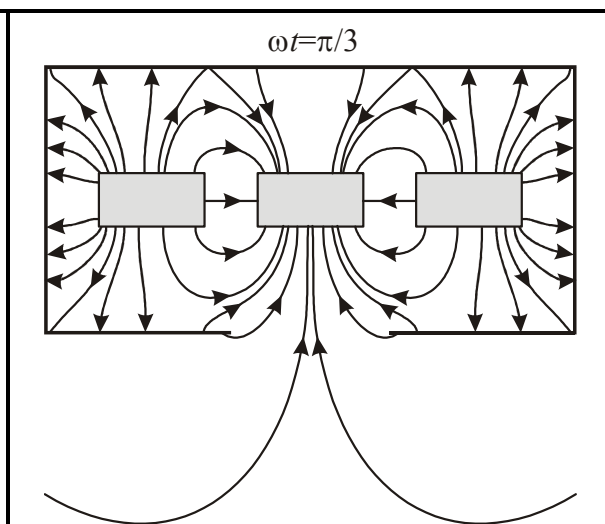


Како се може видети са Сл. 4.48a-b, интензитет електричног поља на унутрашњој и спољашњој површини кошуљице одговара облику еквипотенцијалне криве $\varphi = 0$, која апроксимира попречни пресек кошуљице у тренутку $\omega t = 0$ (Сл. 4.50).

Линије електричног поља у околини проводника вода са Сл. 4.43 у тренутку $\omega t = \pi/3$, приказане су на Сл. 4.51. При томе су димензије вода $A/b = 10$, $B/b = 5$, $a/b = h/b = 2$ и $d/b = d_1/b = 1$.



Сл. 4.50 - Попречни пресек кошуљице вода са Сл. 4.43 и његов приближан облик у тренутку $\omega t = 0$, када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = h/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$ и $N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$.



Сл. 4.51 - Линије поља у воду са Сл. 4.43, када је $A/b = 2B/b = 10$, $A_r/b = 3$, $A_1/b = A_2/b = 3.5$, $a/b = h/b = 2$, $d/b = d_1/b = 1$, $N_0/2 = N_1 = N_2 = N_3 = 40$ и $\omega t = \pi/3$.

Литература

- [4.1] G. M. Anderson: *The Calculation of the Electrical Capacitance of Coaxial Cylinders of Rectangular Cross-Section*, AIEE Transactions, Vol. 69, pt II, 1950, p.p. 728-731
- [4.2] J. Skiles and T. J. Higgins: *Determination of the Characteristic Impedance of UHF Coaxial Rectangular Transmission Lines*, Proceedings National Electronics Conference, Chicago, USA, October 4-6, 1954, p.p. 97-108
- [4.3] H. E. Green: *Characteristic Impedance of square coaxial line*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-11, 1963, p.p. 554-555
- [4.4] T. S. Chen: *Determination of the Capacitance, Inductance, and Characteristic Impedance of Rectangular Lines*, IRE Transactions on Microwave Theory and Technology, MTT-8, 1965, p.p. 510-519
- [4.5] Risaburo Sato and Tetsuo Ikeda: *Line constants*, Microwave Filters and Circuits-Contributions from Japan, edited by Akio Matsumoto, Academic Press, New York and London, 1970, p.p. 129-131[a], 141-142[b]
- [4.6] Драгутин М. Величковић: *Методи за прорачун електростатичких поља*, књига прва, Стил-Подвис, Ниш, 1982, стр. 151-153
- [4.7] Др Јован В. Сурутка: *Електромагнетика*, Грађевинска књига, Београд, 1989, стр. 502-503
- [4.8] D. M. Veličković: *Equivalent Electrodes Method*, Scientific Review, Belgrade, 1996, p.p. 207-248

- [4.9] D. M. Veličković: *TEM Analysis of Transmission Lines Using Equivalent Electrodes Method*, 3rd International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIXS '97, Niš, Yugoslavia, October 8-10., 1997, Proceedings of Papers, p.p. 64-73
- [4.10] Veličković D. M.: *Line Charge in Rectangular Shield*, 8th International IGTE Symposium, Graz, Austria, September 21-24, 1998, Proceedings of Papers, p.p. 327-330
- [4.11] Dragutin M. Veličković, Nenad N. Cvetković, Ilija Mladenović: *Potential and electric field strength calculation of bus-bars*, First Conference on Electrical Engineering & Electronics-EE '98, Gabrovo, Bulgaria, December 3-5, 1998, Proceedings, p.p 37-42
- [4.12] Ненад Н. Цветковић, Драгутин М. Величковић: *Оклопљени водови са проводницима правоугаоног попречног пресека*, XLIII Конференција ЕТРАН, Златибор, 20-23. септембар, 1999. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 176-179
- [4.13] Д. М. Величковић, Н. Н. Цветковић: *Прорачун расподеле електричног поља и потенцијала код сабирница*, 24. Саветовање ЈУКО - СІGRE, Врњачка Бања, 17-20. октобар, 1999. године, Зборник радова, Књига II, стр. R23-14/01 - R23-14/06
- [4.14] Dragutin M. Veličković, Nenad N. Cvetković: *Three-wire shielded lines with rectangular cross-section*, International Conference on Applied and Theoretical Electricity-ICATE 2000, Craiova, Romania, May 25-26, 2000, Proceedings, p.p 17-22
- [4.15] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Оклопљени прорезани трожични водови*, XLIV Конференција ЕТРАН, Сокобања, 26-29. јун, 2000. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 214-217
- [4.16] Ненад Н. Цветковић: *Оклопљени двојични водови правоугаоног попречног пресека проводника*, XLIV Конференција ЕТРАН, Сокобања, 26-29. јун, 2000. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 218-221

5. ЗАКЉУЧАК

У овом раду анализирани су водови полигоналног попречног пресека проводника, при чему је коришћена техника конформних пресликавања, Ламеов метод (метод функције облика) и метод еквивалентне електроде (МЕЕ). При томе су разматрани усамљени водови, водови изнад проводне равни, оклопљени и прорезани водови. Извршено је упоређивање резултата добијених применом наведених метода, било да су ти резултати плод кандидатовог истраживања, било да их је кандидат нашао у литератури која му је била доступна.

Када се ради о конформним пресликавањима, наведене су опште карактеристике метода, док су, сходно теми која представља предмет истраживања овог рада, детаљније описани поједини проблеми за чије се решавање користе неке од Шварц-Кристофелових трансформација, које проблеме полигоналних геометрија своди на решавање једноставнијих проблема у којима се јављају кружни попречни пресеци. На основу изложеног, може се закључити да је применом једног или више конформних пресликавања могуће дводимензионалне електростатичке проблеме у којима се јављају сложене геометрије свести на проблеме у којима фигуришу геометрије у којима постоји познато аналитичко решење проблема или је приближно нумеричко решавање једноставније. У општем случају међутим, примена конформних пресликавања доводи, како је то у раду и показано, до трансцедентних једначина које је неопходно решавати нумерички.

Као што је то у неколико наврата наглашено, метод функције облика применљив је на решавање електростатичких проблема код којих једначине еквипотенцијалних површина задовољавају Ламеов услов, при чему се решење за потенцијал добија у затвореном облику [8, 9]. У овом раду, описан је један нов приближан нумерички поступак за решавање електростатичких проблема, у чијој је основи директна апроксимација еквипотенцијалних површина помоћу на одговарајући начин одабраних функција које задовољавају Ламеов услов [18]. Овај поступак примењен је на водове квадратног попречног пресека проводника, при чему је од значаја била чињеница да се метод може применити и на електроде које имају оштре ивице. Добра особина описаног метода, поред чињенице да се решење за потенцијал добија у затвореном облику, јесте и одсуство појединих компликованијих математичких израчунавања присутних код неких других метода, као што је нпр. нумеричка интеграција. Наравно, апроксимација и добијени резултати утолико су тачнији, уколико је број чланова у примењеној апроксимацији већи. Недостатак разматраног метода је неопходност решавања система нелинеарних једначина што је проблем који посебно долази до изражаја када је примењена апроксимација вишег реда. За очекивати је да ће напретком рачунарских ресурса и евентуалним развојем нумеричких алгоритама за решавање нелинеарних једначина овај проблем бити делимично (или потпуно) превазиђен, па би овде разматрани метод добио нову димензију, јер би се практично елиминисао главни проблем, тренутно присутан при његовој примени.

Метод еквивалентне електроде (МЕЕ) је најмлађи међу поступцима примењеним у овом раду [20]. Метод је могуће применити на решавање дводимензионалних и тродимензионалних проблема. Математички апарат је једноставан и своди се на решавање система линеарних једначина. Није неопходна нумеричка интеграција и решавање нелинеарних једначина било које врсте, што је неоспорно предност у односу на два претходно описана метода. У граничном случају, за неограничено велики број ЕЕ којима се електродни систем замењује, МЕЕ доводи до тачних решења. У раду је МЕЕ примењен на прорачун вишежичних водова правоугаоног попречног пресека проводника изнад проводне равни, оклопљених и прорезаних водова. Коришћењем разумног броја ЕЕ остварено је задовољавајуће слагање са тачним решењима одређеним применом конформних пресликавања, као и са резултатима

добијеним применом неких других метода. Када су познате Грине функције за поједине електроде, односно слојевите средине, ред система линеарних једначина које је неопходно решити је мањи. Ипак, показало се (у случајевима анализираним у раду), да је код израчунавања појединих величина од интереса (подужне отпорности), једноставније применити МЕЕ на "класичан" начин (без коришћења Грине функције). Тиме се избегава нумеричка интеграција, а не губи много на тачности. Наравно, ову констатацију не треба уопштавати.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. B. Christoffel: *Sui Problema delle Temperature Stazionarie e la Rappresentazione di una Data Superficie*, Ann. Mat. Pura Appl., 1, 1867, p.p. 95 [1.1, 2.1]
- [2] H. A. Shwartz: *Über einige Abbildungsaufgaben*, J. reine Angew, Math., 70, 1869, p.p. 105 [1.2, 2.2]
- [3] G.M. Anderson: *The Calculation of the Electrical Capacitance of Coaxial Cylinders of Rectangular Cross-Section*, AIEE Transactions, Vol. 69, pt II, 1950, p.p. 728-731 [4.1]
- [4] J. Skiles and T. J. Higgins: *Determination of the Characteristic Impedance of UHF Coaxial Rectangular Transmission Lines*, Proceedings National Electronics Conference, Chicago, USA, October 4-6, 1954, p.p. 97-108 [1.3, 4.2]
- [5] H. E. Green: *Characteristic Impedance of square coaxial line*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-11, 1963, p.p. 554-555 [1.5, 4.3]
- [6] T. S. Chen: *Determination of the Capacitance, Inductance, and Characteristic Impedance of Rectangular Lines*, IRE Transactions on Microwave Theory and Technology, MTT-8, 1965, p.p. 510-519 [1.4, 4.4]
- [7] Risaburo Sato and Tetsuo Ikeda: *Line constants*, Microwave Filters and Circuits-Contributions from Japan, edited by Akio Matsumoto, Academic Press, New York and London, 1970, p.p. 129-131, 141-142 [1.6, 4.5]
- [8] Драгутин М. Величковић: *О једном новом методу решавања проблема електростатике*, Годишњак Техничког факултета у Нишу, 1970/71, стр. 133-162 [3.1]
- [9] Драгутин М. Величковић: *Примена метода функције облика на електродне системе окружене хетерогеним диелектриком*, Научни подмладак, година III, број 2-3, Ниш, 1971, стр. 53-67 [3.2]
- [10] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York, 8th Printing, Government Printing Office, 10th Printing, 1972, p.p. 255-256, 822-825 [2.3]
- [11] Trefethen, Lloyd N.: *Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation*, SIAM J. Scientific & Statistical Computation, 1, 1980, p.p. 82-102 [1.7]
- [12] Surutka V. Jovan, Veličković M. Dragutin: *Some Improvements of the Charge Simulation Method for Computing Electrostatic Fields*, Bulletin LXXXIV de l' Academie Serbe des Sciences et des Arts, Class des Sciences techniques, No 15, 1981, p.p. 31-35 [1.8]
- [13] Trefethen, Lloyd N.: *Computer applications of the Schwarz-Christoffel transformation*, in E. B. Christoffel-the Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences, edited by P. L. Butzer & F. Feher, Birkhauser Verlag, Basel, 1981, p.p. 263-274 [1.9]
- [14] Драгутин М. Величковић: *Методи за прорачун електростатичких поља*, књига прва, Стил-Подвис, Ниш, 1982, стр. 151-153 [4.6]
- [15] Др Јован В. Сурутка: *Електромагнетика*, Грађевинска књига, Београд, 1989, стр. 122-143 [2.4], 502-503 [4.7]
- [16] William R. Smythe: *Static and dynamic electricity*, Third edition, Revised printing, A Summa Book, Hemisphere publishing corporation, A member of the Taylor & Francis Group, New York-Washington-Philadelphia-London, 1989, p.p. 121-122 [1.10, 3.3]
- [17] Ronald Schinzingler, Patricio A. A. Laura: *Conformal Mapping: Methods and Applications*, Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1991, p.p. 60-71 [2.5]

- [18] Драгутин М. Величковић, *Приближно нумеричко решавање електростатичких проблема помоћу Ламеовог метода*, XXXIX Конференција ЕТРАН, Златибор, 6-9. јун, 1995, Зборник радова, Свеска II, стр. 282-285 [1.11, 3.4]
- [19] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge: *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, John Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 1995, p.p. 117-119, 149-154, 175-187 [2.6]
- [20] D. M. Veličković: *Equivalent Electrodes Method*, Scientific Review, Belgrade, 1996, p.p. 207-248 [1.12, 4.8]
- [21] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Примена Ламеовог метода при прорачуну електромагнетног поља водова*, Четврти интернационални симпозијум из примењене електростатике ПЕС '96, Ниш, 22-24. мај, 1996, Зборник радова, стр. 65-68 [3.5]
- [22] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Приближан прорачун електромагнетног поља водова помоћу Ламеовог метода*, ТЕЛФОР '96, Београд, 26-29. новембар, 1996, Зборник радова, стр. 498-501 [3.6]
- [23] Veličković D. M., Cvetković N. N.: *Lame's Method in Approximate Numerical Solving of Plan-Parallel Electrostatic Problems*, 7th International IGTE Symposium, Graz, Austria, September 23-26, 1996, Proceedings of Papers, p.p. 420-423 [3.7]
- [24] D. M. Veličković: *TEM Analysis of Transmission Lines Using Equivalent Electrodes Method*, 3rd International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIS '97, Niš, Yugoslavia, October 8-10, 1997, Proceedings of Papers, p.p. 64-73 [4.9]
- [25] Ненад Н. Цветковић: *Двожични вод елиптичног попречног пресека проводника изнад проводне равни*, XLII Конференција ЕТРАН, Врњачка Бања, 2-5. јун, 1998, Зборник радова, Свеска II, стр. 282-285 [3.8]
- [26] Veličković D. M.: *Line Charge in Rectangular Shield*, 8th International IGTE Symposium, Graz, Austria, September 21-24, 1998, Proceedings of Papers, p.p. 327-330 [4.10]
- [27] Dragutin M. Veličković, Nenad N. Cvetković, Ilija Mladenović: *Potential and electric field strength calculation of bus-bars*, First Conference on Electrical Engineering & Electronics-EE '98, Gabrovo, Bulgaria, December 3-5, 1998, Proceedings, p.p 37-42 [4.11]
- [28] Ненад Н. Цветковић, Драгутин М. Величковић: *Оклопљени водови са проводницима правоугаоног попречног пресека*, XLIII Конференција ЕТРАН, Златибор, 20-23. септембар, 1999. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 176-179 [4.12]
- [29] Д. М. Величковић, Н. Н. Цветковић: *Прорачун расподеле електричног поља и потенцијала код сабирница*, 24. Саветовање ЈУКО - CIGRE, Врњачка Бања, 17-20. октобар, 1999. године, Зборник радова, Књига II, стр. R23-14/01 - R23-14/06 [4.13]
- [30] Dragutin M. Veličković, Nenad N. Cvetković: *Three-wire shielded lines with rectangular cross-section*, International Conference on Applied and Theoretical Electricity-ICATE 2000, Craiova, Romania, May 25-26, 2000, Proceedings, p.p 17-22 [4.14]
- [31] Драгутин М. Величковић, Ненад Н. Цветковић: *Оклопљени прорезани тројични водови*, XLIV Конференција ЕТРАН, Сокобања, 26-29. јун, 2000. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 214-217 [4.15]
- [32] Ненад Н. Цветковић: *Оклопљени двојични водови правоугаоног попречног пресека проводника*, XLIV Конференција ЕТРАН, Сокобања, 26-29. јун, 2000. године, Зборник радова, Свеска II, стр. 218-221 [4.16]

- [33] Др Драгутин М. Величковић и сарадници: Злата Ж. Цветковић, Небојша Б. Раичевић, Саша С. Илић, Весна Л. Јавор, Ненад Н. Цветковић, Дијана Г. Зулкић: *Збирка решених испитних задатака из Електромагнетике - Први део*, Електронски факултет у Нишу, Ниш, 2000, стр. 129-136 [2.7]

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР	1
1. УВОД	2
2. ПРИМЕНА КОНФОРМНИХ ПРЕСЛИКАВАЊА НА РЕШАВАЊЕ ЕЛЕКТРОСТАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА	5
2.1 О конформним пресликавањима	5
2.2 Шварц-Кристофелова трансформација	5
2.2.1 Шварц-Кристофелова трансформација за квадрат	7
2.2.1.1 <i>Подужно наелектрисање у проводној цилиндричној шупљини квадратног попречног пресека</i>	7
2.2.1.2 <i>Цилиндрични проводник велике дужине и квадратног попречног пресека оптерећен подужним наелектрисањем</i>	11
2.3 Закључак	13
Литература	13
3. ЛАМЕОВ МЕТОД И ЊЕГОВА ПРИМЕНА НА ПРОРАЧУН ВОДОВА ПОЛИГОНАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА ПРОВОДНИКА	15
3.1 О Ламеовом методу	15
3.2 Опис метода	15
3.2.1 Ламеов услов	15
3.2.2 Примена Ламеовог метода	17
3.2.3 Теореме везане за примену Ламеовог метода	19
3.2.4 Примена Ламеовог метода на електроде у хетерогеном диелектрику	20
3.3 Приближан прорачун водова полигоналног попречног пресека проводника применом Ламеовог метода	20
3.3.1 Апроксимација еквипотенцијала	21
3.3.1.1 <i>Апроксимација квадратног попречног пресека</i>	22
3.3.2 Прорачун водова полигоналног попречног пресека	23
3.3.2.1 <i>Вод са проводницима правоугаоног попречног пресека</i>	23
3.4 Закључак	28
Литература	28
4. ПРОРАЧУН ВОДОВА ПОЛИГОНАЛНОГ ПОПРЕЧНОГ ПРЕСЕКА ПРОВОДНИКА ПРИМЕНОМ МЕТОДА ЕКВИВАЛЕНТНЕ ЕЛЕКТРОДЕ	30
4.1 О методу еквивалентне електроде	30

4.1.1	Опис метода	31
4.1.2	Примери примене метода еквивалентне електроде	33
4.1.2.1	<i>Усамљени цилиндрични проводник неограничене дужине кружног попречног пресека</i>	33
4.1.2.2	<i>Цилиндрични кондензатор</i>	35
4.2	Примена метода еквивалентне електроде на решавање водова полигоналног попречног пресека проводника	38
4.2.1	Водови правоугаоног попречног пресека проводника изнад проводне равни	41
4.2.1.1	<i>Нумерички резултати</i>	43
4.2.2	Прорачун оклопљених водова	49
4.2.2.1	<i>Гринова функција</i>	49
4.2.2.2	<i>Примена МЕЕ на оклопљене водове</i>	51
4.2.2.3	<i>Поређење са другим методима</i>	52
4.2.2.4	<i>Нумерички резултати</i>	55
4.2.2.5	<i>Одређивање подужне отпорности</i>	58
4.2.3	Примена метода еквивалентне електроде на прорачун прорезаних водова	63
4.2.3.1	<i>Нумерички резултати</i>	65
	Литература	69
5.	ЗАКЉУЧАК	71
	ЛИТЕРАТУРА	73